10^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Considere o problema de valor inicial

$$u'(x) = u(x), \quad u(0) = 1$$

e mostre que a solução aproximada pelo método de Euler é dada por $u_j = (1+h)^j$.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \sin(xu(x)), & x \in [0,1], \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que este problema tem uma e uma só solução $u \in C^2[0,1]$.
(b) Aplique o método de Euler para obter valores aproximados de $u(\frac{n}{10})$, $n = 1, ..., 4$, e calcule um majorante dos respectivos erros.
(c) Determine o passo $h = \frac{1}{N}$ para o método de Euler de modo que o erro global verifique

$$\max_{0 \le n \le N} |u(x_n) - u_n| \le 10^{-6}.$$

(d) Tome $h = 0.2$ e obtenha um valor aproximado de $u(1)$ pelo método de Taylor de ordem 2.

3. Considere a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = \exp x, & x \in [0,1], \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = -1 \end{cases}$$

Obtenha um valor aproximado para $u(0.2)$ e $u'(0.2)$ pelo método de Euler com passo $h = 0.1$. Sabendo que

$$\max_{x \in [0,0.2]} |u''(x)| \le 2.2, \qquad \max_{x \in [0,0.2]} |u^{(3)}(x)| \le 2.7,$$

deduza um majorante para o erro cometido.

4. Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} u'(x) = f(x), & x \in [a,b], \\ u(a) = \alpha \end{cases}$$

onde $f \in C[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Escrevendo a equação na forma $u(x) = \alpha + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, mostre que
(i) o método de Heun corresponde à aplicação da regra dos trapézios ao integral;
(ii) o método de Euler modificado corresponde à aplicação da regra do ponto médio ao integral.
(c) Mostre que, se $f \in C^3[a,b]$, o erro global do método de Taylor de ordem 2 verifica

$$\max_{0 \le n \le N} |u(x_n) - u_n| \le \frac{(b-a)M}{6} h^2$$

onde $x_n = a + nh = a + n\frac{b-a}{N}$, $n = 0, ..., N$, e $\max_{x \in [a,b]} |u^{(3)}(x)| \le M$.

Métodos de Runge-Kutta de ordem 2

$$u_{j+1} = u_j + \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) hf(x_j, u_j) + \frac{1}{2\alpha} hf(x_j + \alpha h, u_j + \alpha h f(x_j, u_j)), \quad j = 0, 1, ..., \qquad (\alpha \neq 0)$$

- $\alpha = \frac{1}{2}$ - Método de Euler modificado
- $\alpha = 1$ - Método de Heun

1^{a} questão do 3^{o} trabalho computacional

1. Considere a *equação integral de Volterra de segunda espécie*

$$y(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s)y(s)ds, \quad t \in [0,T], \quad T > 0, \tag{1}$$

onde K (núcleo da equação) e g são funções dadas e y é a função incógnita.

Seja $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ uma partição do intervalo $[0,T]$, com $t_i = ih$ e $h = T/N$. Pretende-se determinar valores aproximados da solução y nos pontos $t_1, t_2, ..., t_N$. Sejam $y_i \simeq y(t_i)$, $1 \leq i \leq N$, esses valores aproximados.

Faça $t = t_1$ na equação (1) e aproxime o integral pele regra dos trapézios. Obtenha então um valor aproximado para $y(t_1)$ e designe-o por y_1. De um modo geral, faça $t = t_i$, $i > 1$ em (1)

$$y(t_i) = g(t_i) + \int_0^{t_i} K(t_i,s)y(s)ds, \tag{2}$$

e aproxime o integral pela regra dos trapézios composta. Tendo já obtido $y_1, ..., y_{i-1}$ poderá determinar y_i. Obtém-se assim um algoritmo com a forma

$$y_i = g(t_i) + h \sum_{j=0}^{i} W_{ij} K(t_i, t_j) y_j, i = 1, 2, ..., N. \tag{3}$$

Seja $|e_i| = |y(t_i) - y_i|$ o erro no ponto t_i. O método (3) diz-se converegente se

$$\lim \max_{0 \leq i \leq N} |e_i| = 0,$$

onde o limite é tomado quando $h \to 0$ ($N \to \infty$), respeitando-se a igualdade $T = Nh$. Diz-se que o método tem ordem de convergência p se p é o maior inteiro para o qual

$$\max_{0 \leq i \leq N} |e_i| \leq Mh^p,$$

para valores de h suficientemente pequenos, com M constante independente de h.

(a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $g : [0,T] \to \mathbb{R}$, $K : [0,T] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e um natural N retorna valores aproximados da solução de (1) nos pontos $t_1, t_2, ..., t_N$, através do método descrito.

(b) Considere a seguinte equação

$$y(t) = (1 - 5t) \sin t + 10 \int_0^t \cos(t - s) y(s) ds, \quad t \in [0,1].$$

Aplique o método descrito a esta equação, considerando diversos valores de $h : 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, ...$ Compare os resultados, através de gráficos das soluções aproximadas e duma tabela contendo os pontos t_i, os valores aproximados y_i e os respectivos erros $|e_i|$. Note que a solução exacta da equação é $y(t) = \sin t$.

(c) Com base nos valores da alínea anterior obtenha uma estimativa da ordem de convergência e relacione este valor com a precisão da regra de integração usada para construir o método.

2ª questão do 3º trabalho computacional
Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), & [a, b], \\ y(a) = \alpha, \quad y'(a) = \beta \end{cases} \tag{4}$$

(a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo $f : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, os valores a, α, b, β e um natural N, retorna valores aproximados da solução de (4) nos pontos $t_i = a + \frac{b-a}{N} i$, $i = 1, ..., N$, através do método de Euler.

(b) Considere a seguinte equação

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Aplique o método de Euler a esta equação, considerando diversos valores de N. Compare os resultados através de gráficos das soluções aproximadas e duma tabela contendo os pontos t_i, os valores aproximados y_i e os respectivos erros $|e_i|$. Obtenha ainda uma estimativa da ordem de convergência.