12^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Estude os seguintes métodos quanto à consistência, estabilidade e ordem

(a) $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left[3f(x_j,u_j) - f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$

(b) $u_{j+1} = u_j + \frac{h}{12}\left[5f(x_{j+1},u_{j+1}) + 8f(x_j,u_j) - f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$

(c) $u_{j+1} = u_{j-1} + \frac{h}{3}\left[f(x_{j+1},u_{j+1}) + 4f(x_j,u_j) + f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$

(d) $u_{j+1} = 2u_{j-1} - u_j + \frac{h}{2}\left[5f(x_j,u_j) + f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$

(e) $2u_{j+1} = 3u_j - u_{j-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_j,u_j) + f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$

2. Determine todos os métodos multipasso convergentes de ordem 2 do tipo

$$u_{j+1} = a_0 u_j + a_1 u_{j-1} + h\left[b_0 f(x_j,u_j) + b_1 f(x_{j-1},u_{j-1})\right]$$

3. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \sin(xu(x)), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

e método

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left[3f(x_j,u_j) - f(x_{j-1},u_{j-1})\right]. \tag{1}$$

Obtenha uma aproximação de $u(1)$ aplicando o método (1) com $h = 0.1$. Inicialize o método (1) com um método de passo simples com a mesma ordem.

4. Considere o método

$$u_{j+1} - (1+\alpha)u_j + \alpha u_{j-1} = \frac{h}{12}\left[(5+\alpha)f_{j+1} + 8(1-\alpha)f_j - (1+5\alpha)f_{j-1}\right]$$

com $-1 \leq \alpha \leq 1$.

(a) Estude-o quanto à consistência, estabilidade, convergência e ordem.

(b) Determine o seu erro de truncatura local.

(c) No caso $a = -0.9$ calcule soluções aproximadas do problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'(x) = -20u(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

e compare com a solução exacta.