2^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) := \ln x$

x	0.5	1.0	1.5	2.0
f(x)	-0.693147	0.0	0.405465	0.693147

(a) Construa a tabela de diferenças divididas correspondente a estes valores e determine o respectivo polinómio interpolador de f.

(b) Calcule um valor aproximado de $f(1.2)$. Obtenha um majorante para o erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.

2. Seja p um polinómio de grau m e sejam $x, x_0, ..., x_n$ $n+2$ pontos distintos. Deduza que

$$p[x_0, ..., x_n, x] = \begin{cases} p^*_{m-n-1}(x), & n < m-1 \\ a_m, & n = m-1 \\ 0, & n > m-1 \end{cases}$$

onde p^*_{m-n-1} é um polinómio de grau $m-n-1$ e a_m é o coeficiente de x^m de p.

3. Considere a seguinte tabela de valores de um polinómio p

x_i	-1	1	4
$p(x_i)$	2	-2	-8

Sabendo que $p[-1,1,2] = 4$ e $p[-1,1,2,4,x] = 3$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1,2,4\}$, determine p.

4. Seja $f \in C^3[0,1]$ uma função real.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio $p \in \mathcal{P}_2$ tal que

$$p(0) = f(0); \quad p(1) = f(1); \quad \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

(b) Supondo que $\left|f^{(3)}\right| \leq M$, $\forall x \in [0,1]$, mostre que

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{M}{6}.$$

3. Considere a tabela de valores das funções $f(x) := \sinh x$ e $g(x) := \cosh x$

x	0.4	0.8	1.6
f(x)	0.410752	0.888106	2.37557
g(x)	1.08107	1.33743	2.57746

(a) Obtenha, na forma de Newton, o polinómio de menor grau que verifica

$$p(0.4) = f(0.4), \quad p(0.8) = f(0.8), \quad p(1.6) = f(1.6)$$

$$p'(0.4) = g(0.4), \quad p'(1.6) = g(1.6)$$

(b) Calcule um valor aproximado de $f(1.2)$ usando o polinómio da alínea anterior. Obtenha um majorante para o erro de interpolação e compare-o com o erro efectivamente cometido.

5. Obtenha, por interpolação inversa, uma aproximação do zero $z \in [0,1]$ da função $f(x) := \ln(1+x^2) - \exp(-x)$. Utilize a seguinte tabela de valores de f

x	0.0	0.4	0.6	1.0
f(x)	-1.00000	-0.52190	-0.24133	0.32527

Efectue os cálculos usando o esquema de Neville.

6. Seja $f(x) := \sin x$ e seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, ..., \frac{(n-1)\pi}{n}, \pi$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [0,\pi].$$

Verifique experimentalmente este resultado. Para tal, construa os poliómios p_n, $n = 2,3,4,...$, usando a rotina InterpolatingPolynomial do *Mathematica* e compare graficamente a função f com os polinómios obtidos.

2ª questão do 1º trabalho computacional

Implemente em *Mathematica* o Método de Müller para a resolução numérica de uma equação a uma variável $f(x) = 0$. Defina uma função que, recebendo a função f, três aproximações iniciais para a raíz e dois valores correspondentes a critérios de paragem (distância entre duas iteradas consecutivas e número máximo de iterações), retorna uma aproximação para a solução de $f(x) = 0$. Aplique o Método de Muller às seguintes equações:

(i) $\ln(1+x^2) = \exp(-x)$, no intervalo $[0,1]$;

(ii) $600x^4 - 550x^3 + 200x^2 - 20x = 1$, no intervalo $[0.1, 1]$.