3^a aula prática de Análise Numérica II
1^o semestre de 2002/2003

1. Considere os pontos igualmente espaçados $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, ..., n, \qquad \left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

(a) Verifique que com a mudança de variável

$$x(t) := x_0 + th, \quad t \in [0, n],$$

a fórmula de majoração do erro de interpolação de uma função $f \in C^{n+1}[a, b]$ fica

$$\max_{t\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq M_{n+1} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t\in[0,n]} |\psi_n(t)|$$

onde $M_{n+1} := \|f^{(n+1)}\|_\infty$ e

$$\psi_n(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - i), \quad n = 1, 2, ...$$

(b) Mostre que $|\psi_n(t)|$ é simétrica em relação a $t = \frac{n}{2}$.
(c) Mostre que
• se $t + 1$ é um valor não inteiro com $1 < t + 1 < \frac{n}{2}$ então

$$|\psi_n(t + 1)| < |\psi_n(t)|,$$

• se t é um valor não inteiro com $\frac{n}{2} < t < n - 1$ então

$$|\psi_n(t)| < |\psi_n(t + 1)|.$$

Conclua que

$$\max_{t\in[0,n]} |\psi_n(t)| = \max_{t\in[0,1]} |\psi_n(t)| = \max_{t\in[n-1,n]} |\psi_n(t)|$$

(d) Usando a alínea anterior, mostre que

$$|\psi_n(t)| \leq \frac{n!}{4}, \quad \forall t \in [0, n].$$

(e) Verique graficamente as propriedades da função ψ_n demonstradas nas alíneas (b)-(d), para vários valores de n.
(f) Seja $t^*_n \in]0, 1[$ tal que $\max_{t\in[0,n]} |\psi_n(t)| = |\psi_n(t^*_n)|$. Mostre que

$$t^*_n = O\left(\frac{1}{\ln n}\right), \text{ quando } n \to \infty.$$

(*Sugestão: Calcule* $\psi'_n(t)/\psi_n(t)$). Conclua que

$$\exists K > 0 : |\psi_n(t^*_n)| \leq K \frac{n!}{\ln n}, \quad \forall n > 1.$$

(g) Usando a fórmula de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$, mostre que

$$\exists C > 0 : \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq C \frac{e^{-n}(b-a)^{n+1}}{\sqrt{n} \ln n}, \quad \forall n > 1.$$

2. Determine o polinómio interpolador de Lagrange $p_3 \in \mathcal{P}_3$ da função $f(x) := \ln x$ de modo que o erro $\mathcal{E} := \max\limits_{x \in [0.5, 2.0]} |f(x) - p_3(x)|$ seja minimizado. Calcule o respectivo majorante de $\mathcal{E}$.

3. Pretende-se aproximar a função $f(x) := x^3$ por um polinómio p_2 de grau menor ou igual a 2. Determine p_2 de modo que $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f(x) - p_2(x)|$ seja mínimo.

4. Seja p_n o polinómio interpolador de uma função $f \in C[a, b]$ em $n + 1$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$ no intervalo $[a, b]$.
(a) Mostre que, no caso de existir uma constante $M > 0$ tal que $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n$, tem-se $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$.
(b) Prove que $\lim\limits_{n \to \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ também no caso em que os nós de interpolação são igualmente espaçados, com $x_0 = a$ e $x_n = b$, e $\|f^{(n+1)}\|_\infty \leq M^n (n + 1)!$, com $M \in]0, e/(b - a)[$.

5. Seja $f(x) := \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in I\!R$.
(a) Mostre que

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq k!, \quad \forall x \in I\!R.$$

(b) Seja $a > 0$. Considere os nós de interpolação

$$x_i = \frac{ia}{n}, \quad i = 0, \pm 1, ..., \pm n, \quad n \in I\!R$$

e seja $q_n \in \mathcal{P}_{2n}$ o correspondente polinómio interpolador de f. Para que valores de a se pode garantir que $\lim_{n \to \infty} \|f - q_n\|_\infty = 0$?

6. Seja $f \in C[a, b]$ e seja $p_n \in \mathcal{P}_n$ o seu polinómio interpolador de Lagrange nos pontos $x_0, ..., x_n$. Seja Λ_n a constante de Lebesgue associada aos pontos $x_0, ..., x_n$.
(a) Mostre que

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_\infty.$$

(b) Suponha que os valores $f(x_i)$ são substítuidos por valores aproximados $\tilde{f}_i$ e seja $\tilde{p}_n \in \mathcal{P}_n$ o polinómio interpolador dos valores $\tilde{f}_i$, $i = 0, ..., n$ nos nós $x_0, ..., x_n$. Mostre que

$$\|p_n - \tilde{p}_n\|_\infty \leq \Lambda_n \max_{i \in \{0,...,n\}} |f(x_i) - \tilde{f}_i|.$$

7. Seja $f(t) := \exp(\cos t) \cos(\sin t)$. Determine o polinómio trigonométrico $q \in \mathcal{T}_2$ interpolador de f nos pontos

$$t_j = \frac{2\pi j}{5}, \quad j = 0, ..., 4.$$