4^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Seja $f(x) := \sin x$, e seja $\Delta = \{-\pi/2, 0, \pi/2\}$.

(a) Determine o spline interpolador de f de grau 1 associado à decomposição Δ do intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. Obtenha um majorante do erro global de interpolação.

(b) Determine o spline interpolador de f de grau 3 associado a Δ, utilizando a condição de derivada nos extremos. Obtenha um majorante do erro global de interpolação.

2. Seja $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, e sejam $-5 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 5$ pontos igualmente espaçados.

(a) Determine o espaçamento máximo entre pontos consecutivos que garante um erro global de interpolação seccionalmente afim de f no intervalo $[-5, 5]$ inferior a 10^{-6}.

(b) E se pretendermos aproximar f por um spline cúbico?

(c) Justifique que, nos casos anteriores, o erro global de interpolação tende para zero à medida que o número de pontos aumenta.

3. Seja $p \in \mathcal{P}_3$ o polinómio interpolador dos valores y_0, y_1, y_2, y_3 nos pontos $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$, respectivamente, e seja s um spline cúbico interpolador dos mesmos valores nesses pontos. Mostre que p coincide com s se e só se $s'(x_0) = p'(x_0)$, $s'(x_3) = p'(x_3)$.

4. Determine o spline cúbico interpolador de $f(x) := x(1-x^2)$ nos pontos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$, utilizando

(i) a condição da derivada nos extremos;

(ii) a condição livre nos extremos.

5. Seja $f \in C^2[a, b]$. Seja s o único spline cúbico interpolador de f em $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e satisfazendo a condição da derivada nos extremos ou a condição livre nos extremos. Mostre que

$$\begin{aligned} \|f - s\|_\infty &\leq \frac{h^{\frac{3}{2}}}{2} \|f''\|_\infty \\ \|f' - s'\|_\infty &\leq h^{\frac{1}{2}} \|f''\|_\infty \end{aligned}$$

onde $h := \max\limits_{j \in \{1,\ldots n\}} |x_j - x_{j-1}|$.

6. Seja $f(x) := \sin(\pi x)$.

(a) Construa o spline cúbico que interpola a função f nos nós $0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1$, utilizando

(i) a condição da derivada nos extremos;

(ii) a condição livre nos extremos.

(b) Calcule o número mínimo de nós equidistantes a usar na construção de um spline cúbico interpolador de f, para garantir que os erros não excedam 0.5×10^{-4} nos valores da função e 0.5×10^{-3} nos valores da primeira derivada.

3ª questão do 1º trabalho computacional

Pretende-se construir uma estrada que deve passar por 10 localidades, as quais são identificadas pelas seguintes coordenadas

x	1	3	4	6	8	10	15	16	18	20
y	1	5	7	4.5	12	28	20	19	14.5	10

Determine o traçado da estrada de modo qua a sua curvatura média seja mínima. Resolva o problema

(i) resolvendo o sistema de equações correspondente no *Mathematica*;

(ii) usando a rotina SplineFit do *Mathematica*.