6^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Seja X um espaço pré-hilbertiano e seja $\{\phi_0, ..., \phi_m\} \subset X$ um sistema ortogonal.

(a) Mostre que $\| \sum_{j=0}^{m} c_j \phi_j \|^2 = \sum_{j=0}^{m} c_j^2 \|\phi_j\|^2$.

(b) Seja f^* a melhor aproximação de $f \in X$ no subespaço $Y := span\{\phi_0, ..., \phi_m\}$. Mostre que $\|f - f^*\|^2 = \|f\|^2 - \|f^*\|^2$.

2. Demonstre a seguinte propriedade dos polinómios ortogonais: os n zeros do polinómio p_n de grau n são reais, distintos e interiores ao intervalo $[a, b]$.

3. **(a)** Mostre que os polinómios de Chebyshev $T_i(x) := \cos(i \arccos x)$, $i = 0, 1, 2, ...$, verificam

$$< T_i, T_j >:= \int_{-1}^{1} \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \pi, & i = j = 0 \\ \pi/2, & i = j > 0 \end{cases}$$

(b) Seja $f(x) := \arccos x$, $x \in [-1, 1]$. Determine o polinómio $q^* \in \mathcal{P}_2([-1, 1])$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x) - q(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad q \in \mathcal{P}_2([-1, 1]).$$

4. Considere o produto interno definido em $C[-1, 1]$

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx.$$

(a) Calcule os polinómios mónicos ψ_0, ψ_1, ψ_2, de grau $0, 1, 2$, respectivamente, ortogonais em relação a este produto interno.

(b) Determine o polinómio $p_2^* \in \mathcal{P}_2([-1, 1])$ que minimiza

$$\int_{-1}^{1} x^2 (\exp(x) - p_2(x))^2 dx, \quad p_2 \in \mathcal{P}_2([-1, 1]).$$

(c) Calcule o erro $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 (\exp(x) - p_2^*(x))^2 dx$.

5. Determine a melhor aproximação uniforme da função $f(x) := x^4$ no intervalo $[0, 2]$ por um polinómio $p^* \in \mathcal{P}_3$. Calcule o erro $\|f - p^*\|_\infty$.

6. Seja $f(x) := |x|$, $x \in [-1, 1]$. Prove que a melhor aproximação uniforme da função f em $\mathcal{P}_3([-1, 1])$ é dada por

$$p^*(x) = x^2 + \frac{1}{8}.$$

7. Aproxime a função $f(x) := \sqrt[3]{x}$ por uma recta no intervalo $[0, 1]$

(i) no sentido dos mínimos quadrados com função peso 1;

(ii) na norma uniforme.

Em ambos os casos, calcule a norma da função erro.

1^{a} questão do 2^{o} trabalho computacional

1. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo duas listas, contendo, respectivamente, os pontos a ajustar e os correspondentes pesos, e uma lista de funções de base, retorna a função que melhor se ajusta aos dados no sentido dos mínimos quadrados.

(b) Pretende-se construir uma estrada que deve passar por 10 localidades, identificadas pelas coordenadas (x, y) e com número de habitantes h, de acordo com a tabela

x	1	3	4	6	8	10	15	16	18	20
y	1	5	7	4.5	12	28	20	19	14.5	10
h	200	150	400	210	355	100	245	200	490	110

A estrada deve ser uma curva cúbica e passar mais próximo das localidades com mais habitantes. Determine o traçado da estrada de modo a minimizar a soma quadrática, ponderada pelo número de habitantes, das distâncias a cada localidade.