7^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Seja $f \in C^4[a,b]$. Mostre que

(a) $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ com erro $E(f) = -\dfrac{h^2}{6} f^{(3)}(\eta)$, onde $\eta \in]a-h, a+h[$.

(b) $f''(a) \approx \dfrac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}$ com erro $E(f) = -\dfrac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$, onde $\xi \in]a-h, a+h[$.

2. Pretende-se construir uma fórmula de integração do tipo

$$Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(\pi/2)$$

para aproximar o integral

$$I(g) = \int_0^{\pi/2} g(x)dx.$$

(a) Calcule A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja exacta sobre $\mathcal{Y} = \{a + b\sin(x); a, b \in \mathbb{R}\}$.
(b) Seja $g(x) := 45 + 100\sin(x)$. Calcule $I(g)$ usando a fórmula de integração obtida em (a).

3. Seja $L(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$. Pretende-se aproximar L por um funcional do tipo

$$Q(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

com $x_0, x_1, x_2 \in [-1, 1]$.
(a) Determine os coeficientes A_0, A_1 e A_2 de modo que Q seja exacta sobre $\mathcal{P}_2$ nos seguintes casos
(i) $x_0 = -1, x_1 = 1/2, x_2 = 1$;
(ii) $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$;
(iii) $x_0 = -\sqrt{3}/3, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}/3$;
(iv) $x_0 = -\sqrt{3/5}, x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3/5}$.
Relativamente às fórmulas obtidas na alínea anterior
(b) Determine o maior valor de m para o qual Q é uma representação exacta de L sobre $\mathcal{P}_m$.
(c) Obtenha uma expressão do erro $(L - Q)(f)$ em termos das derivadas de f.

4. Pretende-se aproximar o funcional $I : C[-1,1] \to \mathbb{R}$

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$$

por um funcional do tipo

$$Q = A_0\delta_{-1} + A_1\delta_0 + A_2\delta_1,$$

com $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.
(a) Determine A_0, A_1, A_2 de modo que Q seja uma representação exacta de I sobre $\mathcal{P}_2$.
(b) Determine o maior valor de m para o qual Q é uma representação exacta de I sobre $\mathcal{P}_m$.

5. **(a)** Mostre que

$$\int_a^b q(x)dx = \frac{b-a}{2}[q(a)+q(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[q'(a)-q'(b)], \quad \forall q \in \mathcal{P}_3.$$

(b) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^4. Mostre que existe $\eta \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{(b-a)^2}{12}[f'(a)-f'(b)] + f^{(4)}(\eta)\frac{(b-a)^5}{720}.$$

6. Pretende-se obter uma fórmula de integração com dois nós no intervalo $[-1,1]$

$$Q(f) = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

para aproximar o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

(a) Determine A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja, pelo menos, de grau 1.

(b) Mostre que, se x_0 e x_1 forem tais que $x_0 x_1 = -\frac{1}{3}$, a fórmula de integração assim obtida tem, pelo menos, grau 2.

(c) Para que valores de x_0 e x_1 a fórmula terá grau 3? Quais são, neste caso, os valores de A_0 e A_1?

(d) Mostre que, para os valores de x_0 e x_1 obtidos na alínea anterior, e $f \in C^4[-1,1]$, se tem

$$E(f) := \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{135}$$