8^{a} aula prática de Análise Numérica II

1^{o} semestre de 2002/2003

1. Pretende-se aproximar o funcional $I : C[0, 2h] \to \mathbb{R}$

$$I(f) = \int_0^{2h} f(x)dx$$

por um funcional do tipo

$$Q := A_0\delta_{h/2} + A_1\delta_h + A_2\delta_{3h/2},$$

com $A_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

(a) Determine A_0, A_1, A_2 de modo que Q seja uma representação exacta de I sobre $\mathcal{P}_2$.

(b) Qual o grau da fórmula de integração obtida?

(c) Sabendo que

$$I = Q + M\delta_\xi^{(4)},$$

com $M \in \mathbb{R}$, e $\xi \in]0, 2h[$, determine o valor da constante M.

2. Considere uma fórmula de quadratura

$$Q(f) := \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \text{ com } x_i \in [a, b].$$

para aproximar o integral

$$\int_a^b w(x)f(x)dx, \text{ com } w(x) > 0, \forall x \in [a, b].$$

(a) Mostre que, qualquer que seja a escolha dos nós de integração, a fórmula Q não pode ter grau superior a $2n + 1$.

(b) Mostre que a fórmula Q tem grau $2n + 1$ se e só se

$$\int_a^b w(x) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)q(x)dx = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}_n[a, b].$$

(c) Quais são os nós de integração numa fórmula de grau $2n + 1$?

2^{a} questão do 2^{o} trabalho computacional

1. (a) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e um natural n retorna uma aproximação do integral $\int_a^b f(x)dx$ pela regra dos trapézios composta

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})\right]$$

(b) Defina em *Mathematica* uma função que, recebendo uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e uma lista de funções de base $\{g_0, ..., g_m\}$, retorna a função que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados (caso contínuo).

(c) Aproxime a função $f(x) := \exp(2\sin^2(x))$, $x \in [0, 2\pi]$ por uma função do tipo $\sum_{k=0}^{n} c_k \cos(kx)$. Considere vários valores de n e represente graficamente os resultados. Comente.

3ª questão do 2º trabalho computacional

Pretende-se calcular um valor aproximado de

$$\arctan x = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

através da aproximação do integral. Utilize fórmulas de integração interpolatórias, justificando a escolha dos nós, para aproximar

(i) $\arctan 2$;

(ii) $\arctan 4$.

Justifique a convergência dos processos utilizados.