

9ª aula prática de Análise Numérica II

1º semestre de 2002/2003

1. Mostre que a fórmula de integração

$$Q_n(f) = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

define um funcional linear limitado em $C[a, b]$ com norma $\|Q_n\|_\infty = \sum_{i=0}^n |A_i|$.

2. (a) Mostre que os pesos das fórmulas de Gauss são positivos.

(b) O que pode concluir quanto à convergência destas fórmulas quando o número de nós de integração tende para infinito?

3. Deduza as fórmulas de Gauss-Legendre, incluindo a expressão do erro, para aproximar o integral

$$\int_a^b f(x) dx.$$

4. (a) Mostre que na fórmula de Gauss-Chebyshev com $n + 1$ nós, os pesos são $A_i = \frac{\pi}{n + 1}$, $i = 0, \dots, n$.

(b) Obtenha um valor aproximado para o integral $\int_0^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}} dx$ pela fórmula de Gauss-Chebyshev com grau de precisão 7.

5. Considere o integral $\int_0^1 \exp(x^2) dx$.

(a) Determine o seu valor aproximado, considerando 4 subintervalos e utilizando

(i) a regra dos trapézios;

(ii) a regra de Simpson.

(b) Faça uma estimativa do número de subintervalos que deveria considerar, se pretendesse calcular o integral da alínea anterior com erro inferior a 10^{-4} , utilizando

(i) a regra dos trapézios;

(ii) a regra de Simpson.

6. Utilizando a regra dos trapézios composta, mostre que

$$(a) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$(b) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

7. Dedução da Regra do ponto médio

(a) Mostre que

$$\int_{a_0 - \frac{h}{2}}^{a_0 + \frac{h}{2}} f(x) dx = hf(a_0) + \frac{h^3}{24} f''(\theta), \quad \theta \in [a_0 - \frac{h}{2}, a_0 + \frac{h}{2}]$$

(b) Deduza a respectiva fórmula composta para aproximar um integral $\int_a^b f(x)dx$, incluindo a expressão do erro.

8. Mostre que

(a) se $f \in H^2(a, b)$, o erro na regra dos trapézios composta é dado por

$$\int_a^b f(x)dx - T_h(f) = - \int_a^b K_T f''(x)dx,$$

onde o núcleo de Peano K_T é dado por $K_T = \frac{1}{2}(x - x_{i-1})(x_i - x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, para $i = 1, \dots, n$.

(b) se $f \in H^4(a, b)$, o erro na regra de Simpson composta é dado por

$$\int_a^b f(x)dx - S_h(f) = - \int_a^b K_S f^{(4)}(x)dx,$$

onde o núcleo de Peano K_S é dado por

$$K_S = \begin{cases} \frac{h}{18}(x - x_{i-2})^3 - \frac{1}{24}(x - x_{i-2})^4, & x_{i-2} \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{h}{18}(x_i - x)^3 - \frac{1}{24}(x - x_i)^4, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \end{cases}$$

para $i = 2, \dots, n$.

9. Implemente, em *Mathematica*, as fórmulas de quadratura de Romberg para aproximar $\int_a^b f(x)dx$, definidas recursivamente do seguinte modo. Sejam

$$T_k^1(f) := T_{h_k}^1(f), \quad k = 0, 1, \dots$$

as somas trapezoidais para os passos $h_k = h/2^k$, sendo h fixado inicialmente. Para $m = 1, 2, \dots$ as quadraturas de Romberg são definidas por

$$T_k^{m+1}(f) := \frac{1}{4^m - 1} [4^m T_{k+1}^m(f) - T_k^m(f)].$$

É possível mostrar que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_k^m(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^m(f) = \int_a^b f(x)dx$$