# $13^{\text{a}}$ aula prática de Análise Numérica II

## $1^{\text{o}}$ semestre de 2002/2003

**1.** Considere o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 0, \quad x \in ]0,1[ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

**(a)** Determine a solução exacta de (1).

**(b)** Obtenha uma aproximação da solução da equação (1) pelo método das diferenças finitas com $h = 0.25$ e compare com a solução exacta.

**2. (a)** Mostre que o problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((2 + 0.5x\cos(x^2))\dfrac{du}{dx}\right) = u(x) + 1, \quad x \in ]1,2[ \\ u(1) = 1, \quad u(2) = 5 \end{cases} \tag{2}$$

tem uma e uma só solução.

**(b)** Obtenha aproximações da solução da equação (2) considerando $h = 0.25, 0.1, 0.05....$ Represente os resultados numa tabela que inclua os pontos $x_i = 0.25i$, $i = 1, 2, 3$, e comente.

**3.** Considere o seguinte problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \quad x \in ]0, L[ \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

onde $f$ é uma função suficientemente regular definida em $[0, L]$.

**(a)** Verifique que a solução de (7) é dada por

$$u(x) = -\int_0^x F(s)ds + \frac{x}{L}\int_0^L F(s)ds, \text{ com } F(x) = \int_0^x f(s)ds.$$

Se as funções $f$ e/ou $F$ não forem primitiváveis, torna-se necessário proceder a uma aproximação da solução.

**(b)** Mostre que o esquema de diferenças finitas associado aos pontos

$$x_i = ih \quad 0 \le i \le N, \quad h = \frac{L}{N},$$

se escreve

$$\begin{cases} \dfrac{2u_1 - u_2}{h^2} = f_1, \\ \dfrac{2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad 2 \le i \le N-2, \\ \dfrac{2u_{N-1} - u_{N-2}}{h^2} = f_{N-1} \end{cases} \tag{4}$$

Na forma matricial, o sistema (4) fica $A.U = F$, com

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{bmatrix} \tag{5}$$

**(c)** Seja $f \in C^2([0,L])$. Mostre que

$$\left| \frac{2u(x) - u(x+h) - u(x-h)}{h^2} + u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \max_{y \in [0,L]} |f''(y)|.$$

**(d)** Mostre que a matriz $A^{-1} = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$ verifica $\alpha_{ij} \geq 0$ e

$$0 < \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_{ij} \leq \frac{L^2}{8}, \quad i = 1, ..., N-1. \tag{6}$$

**(e)** Mostre que

$$\max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{L^2 h^2}{96} \max_{y \in [0,L]} |f''(y)|$$

**(f)** Aproxime a solução da equação (7) nos seguintes casos
**i.** $L = 10$, $f(x) = x^2$.
**ii**. $L = 2$, $f(x) = \sin(x^2)$,
considerando $h = 0.25, 0.1, 0.05, 0.01, ...$ e obtenha um majorante do erro $\max_{1 \leq i \leq N-1} |u(x_i) - u_i|$.

No caso **i.**, obtenha a solução exacta e compare com as aproximações obtidas, calculando os erros $|u(x_i) - u_i|$.

**$3^{\text{a}}$ questão do $3^{\text{o}}$ trabalho computacional**

Considere o seguinte problema com condições na fronteira

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + f(x), \quad x \in ]0, L[ \\ u'(0) - au(0) = 0, \quad u(L) = b \end{cases} \tag{7}$$

onde $f$, $p$ e $q$ são funções contínuas em $[0, L]$. Se

$$q(x) \geq \gamma > 0, \quad \forall x \in [0, L]$$

e se $a \geq 0$, então o problema (7) tem solução única.

Neste trabalho pretende-se aproximar a solução de (7) pelo *método das diferenças finitas*. Sendo

$$x_i = ih \quad 0 \leq i \leq N, \quad h = \frac{L}{N},$$

aproximam-se as derivadas $u'(x_i)$ e $u''(x_i)$ por

$$u'(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad u''(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

onde $u(x_j) \approx u_j$, $0 \leq j \leq N$. A substituição destas fórmulas em (7) conduz ao sistema linear para os $u_j$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = p_i \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \right) + q_i u_i + f_i \qquad 1 \leq i \leq N-1. \tag{8}$$

onde $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ e $f_i = f(x_i)$. Trata-se de um sistema de $N-1$ equações com $N+1$ incógnitas, $u_j$, $0 \leq j \leq N$.

Impondo as condições de fronteira, obtém-se um sistema de $N$ equações com $N$ incógnitas. De facto, a incógnita $u_N$ é imediatamente eliminada usando a condição $u(x_N) = u(L) = b$, que permite obter, para $i = N-1$,

$$\frac{b - 2u_{N-1} + u_{N-2}}{h^2} = p_{N-1} \left( \frac{b - u_{N-2}}{2h} \right) + q_{N-1}u_{N-1} + f_{N-1}.$$

Consideramos agora a seguinte aproximação

$$u(x_1) \approx u(0) + u'(0)h + u''(0)\frac{h^2}{2}$$

Usando a condição $u'(0) = au(0)$ e $u''(0) = p(0)u'(0) + q(0)u(0) + f(0) = ap(0)u(0) + q(0)u(0) + f(0)$, obtém-se uma nova equação

$$u_1 = u_0 \left( 1 + ah + ap_0 \frac{h^2}{2} + q_0 \frac{h^2}{2} \right) + \frac{h^2}{2} f_0.$$

Portanto, o esquema numérico considerado escreve-se

$$\begin{cases} -\left(1 + ah + ap_0 \dfrac{h^2}{2} + q_0 \dfrac{h^2}{2}\right) u_0 + u_1 = \dfrac{h^2}{2} f_0, \\ (1 + \dfrac{h}{2} p_i) u_{i-1} - u_i(2 + h^2 q_i) + u_{i+1}(1 - \dfrac{h}{2} p_i) = h^2 f_i, \quad 1 \leq i \leq N-2, \\ (1 + \dfrac{h}{2} p_{N-1}) u_{N-2} - (2 + h^2 q_{N-1}) u_{N-1} = h^2 f_{N-1} - b(1 - \dfrac{h}{2} p_{N-1}) \end{cases} \tag{9}$$

Na forma matricial, o sistema (9) fica $A.U = F$ com

$$A = \begin{bmatrix} -\left(1+ah+ap_0\frac{h^2}{2}+q_0\frac{h^2}{2}\right) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ (1+\frac{h}{2}p_1) & -(2+h^2q_1) & (1-\frac{h}{2}p_1) & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & (1+\frac{h}{2}p_{N-2}) & -(2+h^2q_{N-2}) & (1-\frac{h}{2}p_{N-2}) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (1+\frac{h}{2}p_{N-1}) & -(2+h^2q_{N-1}) \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2}f_0 \\ h^2 f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_{N-2} \\ h^2 f_{N-1} - b(1-\frac{h}{2}p_{N-1}) \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}$$

**1**. Indique condições suficientes para que o sistema (9) tenha solução única.

**2**. Implemente em *Mathematica* o método das diferenças finitas, considerando como dados as funções $f$, $p$ e $q$, as constantes $L$, $a$ e $b$, e o número de pontos da discretização (ou o passo $h$).

**3**. Considere o problema

$$\begin{cases} u''(x) - u(x) = 0, \quad x \in ]0,2[ \\ u(0) = u'(0), \quad u(2) = 1 \end{cases} \tag{10}$$

**(a)** Determine a solução exacta de (10).
**(b)** Obtenha uma aproximação da solução da equação (10) considerando $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, ....$ Represente graficamente as aproximações obtidas e compare com a solução exacta. Apresente ainda uma tabela que inclua os valores aproximados e a solução exacta nos pontos $x_i = 0.2i$, $i = 0, ...9$. Comente os resultados.

**4**. **(a)** Mostre que o problema

$$\begin{cases} (1+x^2)u''(x) + \sin(x^2)u'(x) - u(x) = \exp(2.5 - \frac{x^2}{100}), \quad x \in ]0,10[ \\ u'(0) = 1, \quad u(10) = 7.5 \end{cases} \tag{11}$$

tem uma e uma só solução.
**(b)** Obtenha aproximações da solução da equação (11) considerando $h = 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.01, ....$ Represente graficamente e numa tabela que inclua os pontos $x_i = 0.5i$, $i = 0, ...19$, as aproximações obtidas. Comente os resultados.