**Resumo da resolução (26.06.02)**

**I.1.a)** equivalência entre a solução de (1) e o limite de (2):

$$f(z) \overset{\text{def.}}{=} z - e^{-z/2} = 0 \Leftrightarrow z = e^{-z/2} \Leftrightarrow \log(z) = -z/2$$
$$\Leftrightarrow -2\log(z) + 3z = 4z \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}\log(z) + \frac{3}{4}z \overset{\text{def.}}{=} g(z)$$

Condições para aplicar o teorema do ponto fixo: $g \in C^1(I)$ com $I = [0.6, 0.8]$, e tem-se
i) $g'(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{3}{4}$, que é decrescente, logo $g$ é contractiva em $I$ pois
$L = \max_{x\in I} |g'(x)| = \max\{|g'(0.6)|, |g'(0.8)|\} = \max\{|-0.08333...|, |0.125|\} = 0.125 < 1$.
ii) para verificar $g(I) \subseteq I$, temos
$g(0.6) = 0.705413 \in I$,
$g(0.8) = 0.711572 \in I$,
mas $g$ não é monótona em $I$, já que $g'(\frac{2}{3}) = 0$.
No entanto, no extremo relativo $g(\frac{2}{3}) = 0.702733 \in I$, logo $g(I) \subseteq I$.
- Pelo TPF a sucessão definida por $x_{n+1} = g(x_n) = -\frac{1}{2}\log(x_n) + \frac{3}{4}x_n$ converge para o único ponto fixo $z \in I$ de $g$, qualquer que seja $x_0 \in I$, em particular para $x_0 = 0.6$. Pela equivalência, o único ponto fixo $z$ de $g$ é a única raiz de $f$ em $I$.

**I.1.b)** $x_0 = 0.6, x_1 = g(x_0) = 0.70541283, x_2 = g(x_1) = 0.70354566, x_3 = g(x_2) = 0.703470495$,
tendo-se $|x_2 - x_1| = 0.001367...$, e $|x_3 - x_2| = 0.000075... < 10^{-4}$.
$|e_3| \le \frac{L}{1-L}|x_3 - x_2| = \frac{0.125}{1-0.125}0.000075... = 0.1074 \times 10^{-4}$.

**I.1.c)** $f \in C^2(I)$ e verificam-se as condições suficientes para convergência do M. Newton
i) $f(0.6)f(0.8) < 0$, ii) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-x/2} > 0$, iii) $f''(x) = -\frac{1}{4}e^{-x/2} < 0$,
iv) $|f(0.6)/f'(0.6)| = 0.1027 \le 0.2, |f(0.8)/f'(0.8)| = 0.0971 \le 0.2$,
que asseguram a convergência quadrática para a raiz $z$, qualquer que seja $x_0 \in I$.

**I.2.** Como $g' > 0$, $g$ é crescente em $I$, basta que $g(a) \in I$ e que $g(b) \in I$.
Como também temos $g' < 1$ em $I$ e $g(z) = z \in I$, ($z$ ponto fixo), então
$g(a) = g(a) - g(z) + z = -g'(\xi)(z-a) + z \in ]-(z-a)+z, z[=]a, z[\subseteq I$
$g(b) = g(b) - g(z) + z = g'(\xi)(b-z) + z \in ]z, b-z+z[=]z, b[\subseteq I$

**II.1**

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1^3 + 5x_2 - 2x_3 \\ e^{x_2} - x_3^2 - 1 \\ -x_1^2 + x_2 + x_3 - \alpha \end{bmatrix}, \quad J_F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 5 & -2 \\ 0 & e^{x_2} & -2x_3 \\ -2x_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

portanto o sistema $J_F(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -F(\mathbf{x}^{(0)})$ com $\mathbf{x}^{(0)} = (c, 0, 0)$ fica

$$\begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\begin{bmatrix} c^3 + 0 - 0 \\ 1 - 0 - 1 \\ -c^2 + 0 + 0 - \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^3 \\ 0 \\ c^2 + \alpha \end{bmatrix}$$

**II.2.** Notamos que a matriz nunca pode ter a diagonal estrit. dominante por linhas (já que $|-2c|+1 > 1$) ou por colunas (pois$|-2| > 1$).
Devemos analisar a condição necessária e suficiente, com o raio espectral.da matriz $C$ (p/Jacobi)

$$C = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} \frac{1}{3c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2c & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-5}{3c^2} & \frac{2}{3c^2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2c & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

cujos valores próprios são dados pela solução de $\lambda(\lambda^2 - \frac{4}{3c}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = \pm\frac{2}{\sqrt{3c}}$.
Assim, $\rho(C) = \max\{0, |\frac{-2}{\sqrt{3c}}|, |\frac{+2}{\sqrt{3c}}|\} = \frac{2}{\sqrt{3|c|}} < 1$ se e só se $|c| > \frac{4}{3}$.

**II.3.** Com $c = 1$, temos $||A||_\infty = \max\{3 + 5 + |-2|, 1, |-2| + 1 + 1\} = 10$.
Logo $cond_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty = 10 \times 18 = 180$.
O erro relativo de $\mathbf{b}$ é dado por (note que $\alpha > 0$)

$$||\delta_b||_\infty = \frac{||\mathbf{b} - \tilde{\mathbf{b}}||_\infty}{||\mathbf{b}||_\infty} = \frac{||(0, 0, \alpha - \tilde{\alpha})||_\infty}{||(-1, 0, 1+\alpha)||_\infty} = \frac{|\alpha - \tilde{\alpha}|}{1+\alpha} \le \frac{0.001}{1+\alpha}$$

Assim, como $||\delta_x||_\infty \leq cond_\infty(A)||\delta_b||_\infty \leq 180\frac{0.001}{1+\alpha} = \frac{0.18}{1+\alpha} < 0.18$.

**III.1.a)**
i) $S(f) = \frac{13-1}{6}(f(1) + 4f(\frac{13+1}{2}) + f(13)) = 2(10 + 4 \times 8 + 15) = 114$
ii) Apenas podemos usar os nós igualmente espaçados {1,4,7,10,13}que definem 4 subintervalos com $h = \frac{13-1}{4} = 3$.
$S_4(f) = \frac{h}{3}(f(1) + f(13) + 4[f(4) + f(10)] + 2f(7)) = 10 + 15 + 4 \times (6 + 14) + 2 \times 8 = 121$.
**III.1.b)** O polinómio interpolador é (usando a F. Newton)
$p_2(x) = f(3) + f[3,4](x-3) + f[3,4,7](x-3)(x-4)$

| $x_i$ | $f_i$ | $f[,]$ | $f[,,]$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | | |
| | | $\frac{6-5}{4-3}=1$ | |
| 4 | 6 | | $\frac{\frac{2}{3}-1}{7-3} = \frac{-1}{12}$ |
| | | $\frac{8-6}{7-4}=\frac{2}{3}$ | |
| 7 | 8 | | |

logo $p_2(x) = 5 + (x-3) - \frac{1}{12}(x-3)(x-4) = 1 + \frac{19}{12}x - \frac{1}{12}x^2$.
**III.1.c)** As funções base são $\phi_0(x) = x^2, \phi_1(x) = x$, e os pontos são $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$. Assim,
$< \phi_0, \phi_0 >= 0^4 + 1^4 + 2^4 = 17, < \phi_0, \phi_1 >=< \phi_1, \phi_0 >= 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9, < \phi_1, \phi_1 >= 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$
$< \phi_0, f >= 0^2 \times 12 + 1^2 \times 10 + 2^2 \times 7 = 38, < \phi_1, f >= 0 \times 12 + 1 \times 10 + 2 \times 7 = 24$,

$$\begin{bmatrix} 17 & 9 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 24 \end{bmatrix}, \text{ pelo que } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6.5 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

e a função que melhor aproxima no sentido dos min. quadrados é $g(x) = -6.5x^2 + 16.5$.

**III.2.a)** Para $Q$ ser exacta para polinómios de grau 1, devido à linearidade de $Q$ e $I$, basta ver que

$$A_0 + A_1 = Q(1) = I(1) = \int_0^4 xdx = [\frac{x^2}{2}]_{x=0}^{x=4} = 8$$
$$A_0 0 + A_1 3 = Q(x) = I(x) = \int_0^4 x \cdot xdx = [\frac{x^3}{3}]_{x=0}^{x=4} = \frac{64}{3}$$

o que dá $A_1 = \frac{64}{9}$ e $A_0 = 8 - A_1 = \frac{8}{9}$. Logo

$$Q(f) = \frac{8}{9}f(0) + \frac{64}{9}f(3)$$

e temos por um lado $Q(x^2) = 64$ e por outro $I(x^2) = \int_0^4 x^3 dx = [\frac{x^4}{4}]_{x=0}^{x=4} = 64$.
Resta ver que $Q(x^3) = 192$ é diferente de $I(x^3) = [\frac{x^5}{5}]_{x=0}^{x=4} = \frac{256}{5}$, para concluir que $Q$ tem grau 2.

**III.2.b)** $E(f) = I(f) - Q(f)$, e como $Q(f) = Q(p_2)$ onde $p_2$ interpola $f$ em $0, 3$ e noutro ponto qualquer $a$.
Como por a) a fórmula é exacta para $p_2$ (que tem grau$\leq$2), $Q(p_2) = I(p_2)$.
Assim $E(f) = I(f) - I(p_2) = \int_0^4 x(f(x) - p_2(x))dx$. Pelo erro de interpolação,
$f(x) - p_2(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{3!}x(x-3)(x-\alpha)$, assim
$E(f) = \int_0^4 x[\frac{f'''(\xi_x)}{3!}x(x-3)(x-\alpha)]dx$, e para aplicar o T. Valor Intermédio p/Integrais, escolhemos $\alpha = 3$,de forma a que $x^2(x-3)(x-\alpha)$ não mude de sinal em $[0,4]$, ficando (para $\theta \in [0,4]$)

$$E(f) = \frac{f'''(\theta)}{3!}\int_0^4 x^2(x-3)^2 dx = \frac{f'''(\theta)}{3!}\frac{64}{5} = \frac{32f'''(\theta)}{15}.$$

**III.3.**
Com $f(x,y) = -x/y$, o método de Euler fica $y_{n+1} = y_n - hx_n/y_n$ com $y_0 = 2$.
Usando $h = 0.1$, temos
$y_1 = y_0 - 0.1(x_0/y_0) = 2 - 0.1\frac{1}{2} = 1.95$
$y_2 = y_1 - 0.1(x_1/y_1) = 1.95 - 0.1\frac{1.1}{1.95} = 1.89359$
Logo $y(1.2) \sim y_2 = 1.89359$.