χ **resolução** (exame de 3 de Julho de 2004)

1. a) Escolhemos os 3 nós que se encontram mais próximos de $t = 4$, ou seja {2,3,5},

2		3		5
7		6		5
	$\frac{6-7}{3-2} = -1$		$\frac{5-6}{5-3} = -\frac{1}{2}$	
		$\frac{-\frac{1}{2}-(-1)}{5-2} = \frac{1}{6}$		

portanto o polinómio interpolador é $p_2(x) = 7 + (-1)(x-2) + \frac{1}{6}(x-2)(x-3)$,
e temos $p_2(4) = 7 - 2 + \frac{2}{6} = \frac{16}{3} = 5.33333$.

1. b) Pela fórmula de erro, para $x \in [2, 5]$

$$E_2(x) = \frac{c'''(\xi)}{6}(x-2)(x-3)(x-5), \text{ com } \xi \in [2, 5],$$

e usando a hipótese $|c'''(\xi)| \leq 1$, obtemos $|E_2(x)| \leq |(x-2)(x-3)(x-5)|/6$.

Em particular, para $x = 4$, temos $|E_2(4)| \leq |(4-2)(4-3)(4-5)|/6 = 1/3$.

2.a) As funções base são $\phi_1(x) = 1, \phi_2(x) = \frac{12}{1+x}$,
o produto interno discreto definido nos pontos $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5$, é dado por

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle = \sum_{k=1}^{4} \phi_m(x_k)\phi_n(x_k)$$

Em particular, $< \phi_1, \phi_1 >= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$,
$< \phi_1, \phi_2 >=< \phi_2, \phi_1 >= \frac{12}{1+1} + \frac{12}{1+2} + \frac{12}{1+3} + \frac{12}{1+5} = 6 + 4 + 3 + 2 = 15$,
$< \phi_2, \phi_2 >= (\frac{12}{1+1})^2 + (\frac{12}{1+2})^2 + (\frac{12}{1+3})^2 + (\frac{12}{1+5})^2 = 36 + 16 + 9 + 4 = 65$.
Finalmente, no segundo membro, $< \phi_1, c >= 9 + 7 + 6 + 5 = 27$,
$< \phi_2, c >= 9\frac{12}{1+1} + 7\frac{12}{1+2} + 6\frac{12}{1+3} + 5\frac{12}{1+5} = 9 \times 6 + 7 \times 4 + 6 \times 3 + 5 \times 2 = 54 + 28 + 18 + 10 = 110$

b) Das equações $4a + 15b = 27$, $15a + 65b = 110$,
obtemos no método de Gauss-Seidel,

$$a_{n+1} = \frac{27}{4} - \frac{15}{4}b_n, \quad b_{n+1} = \frac{110}{65} - \frac{15}{65}a_{n+1}$$

como $a_0 = z, b_0 = 1$, obtemos $a_1 = \frac{27}{4} - \frac{15}{4} = 3$; $b_1 = \frac{110}{65} - \frac{15}{65}a_1 = \frac{110}{65} - \frac{45}{65} = 1$.
A iteração seguinte dá o mesmo valor (pois também é da forma $(z, 1)$ agora com $z = 3$).
Como a segunda iterada é igual à primeira, concluímos que atingimos o ponto fixo, que é a solução do sistema, logo o erro é nulo. (Pode-se verificar directamente que (1,3) é a solução do sistema.)

3. a) O espaçamento é $h = 1$, e temos

$$S_4(c) = \frac{h}{3}(c(1) + c(5) + 4(c(2) + c(4)) + 2c(3)) = \frac{1}{3}(9 + 5 + 4(7 + \frac{27}{5}) + 2 \cdot 6) = 25 + \frac{1}{5}$$

b) A estimativa para o erro absoluto fica

$$|E_4(c)| \leq \frac{(5-1) \cdot 1^4}{180} \max_{t \in [1,5]} |c''''(t)| \leq \frac{4}{180} 9 = \frac{1}{5}$$

pois $c''''(t) = 12(\frac{1}{t+1})'''' = 12\frac{4!}{(t+1)^5}$ logo $\max_{t\in[1,5]} |c''''(t)| \leq 12\frac{4!}{2^5} = \frac{4^2 3^2}{2^4} = 9$.

Por outro lado, como $\int \frac{1}{t+1}dt = \log(t+1)$, o valor exacto é dado por

$$I(c) = \int_1^5 c(t)dt = \int_1^5 3 + \frac{12}{t+1}dt = 12 + 12(\log(6) - \log(2)) = 12 + 12\log 3.$$

Assim, $E_4(c) = I(c) - S_4(c) = 12 + 12\log(3) - 25 - \frac{1}{5} = 12\log(3) - 12\log(e) - 1 - \frac{1}{5} = 12\log(3/e) - \frac{6}{5}$.

4. A eq. dif. é de 2a.ordem, $p'' = \frac{1}{p^2+1}$, e definindo $u = p, v = p'$, temos
$(u, v)' = (p', p'') = (v, \frac{1}{u^2+1}) = F(u, v)$, um sistema de 1a.ordem.
Como são 2 iterações, $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$, e o método de Euler fica

$$(u_{n+1}, v_{n+1}) = (u_n, v_n) + \frac{1}{2}(v_n, \frac{1}{u_n^2 + 1}).$$

Começando com $(u_0, v_0) = (p(0), p'(0)) = (0, v)$,
$(u_1, v_1) = (0, v) + \frac{1}{2}(v, \frac{1}{0+1}) = (\frac{v}{2}, v + \frac{1}{2})$,
$(u_2, v_2) = (\frac{v}{2}, v + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(v + 1, \frac{1}{(v/2)^2+1}) = (v + \frac{1}{4}, v + \frac{1}{2} + \frac{2}{v^2+4})$.
Assim, a posição $p(1) = u(1)$ é aproximada por $u_2 = v + \frac{1}{4}$.

5. Reordenamos as variáveis para aplicar o método de Jacobi,

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & R \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & S & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & S \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & R & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A diagonal é estrit. dominante por colunas se $|R|, |S| < 2$ (não é por linhas), e o mét. Jacobi converge.
Temos $||C||_1 = \frac{1}{4} \max\{3, 2 + |R|, 3, 2 + |S|\} = \frac{r}{4}$, com $r = 2 + \max\{1, |R|, |S|\}$.
Com $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, obtemos $\mathbf{x}^{(1)} = (b_1, a_1, d_1, c_1) = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$,
logo $||\mathbf{e}^{(n)}||_1 \leq (\frac{r}{4})^n \frac{1}{1-r/4} ||\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{0}||_1$, e $||\mathbf{x}^{(1)}||_1 = \frac{1}{4}(1 + 1 + 1 + 1) = 1$.
Em particular, $||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}||_1 \leq (\frac{r}{4}) \frac{4}{4-r} = \frac{r}{4-r}$ e assim
$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(1)}||_1 = ||(b, a, d, c) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)||_1 = |b - \frac{1}{4}| + |a - \frac{1}{4}| + |d - \frac{1}{4}| + |c - \frac{1}{4}| \leq \frac{r}{4-r}$.

6.a) A repetição das experiências traduz-se numa iteração

$$\frac{4C_{n+1} + 1}{C_n^3 + 2} = 1, \text{ logo } 4C_{n+1} = C_n^3 + 1 \Leftrightarrow C_{n+1} = \frac{1}{4}(C_n^3 + 1).$$

Definindo $g(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 1)$, o limite C será o ponto fixo de g.
Como $g'(x) = \frac{3}{4}x^2 \geq 0 \Rightarrow g$ é crescente, então $g(0) = \frac{1}{4}, g(1) = \frac{1}{2}$,
implica $g[0, 1] \subseteq [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \subseteq [0, 1]$ (é invariante),
e $\max_{x\in[0,1]} |g'(x)| = \max_{x\in[0,1]} \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4} < 1$ (é contractiva).
Pelo T. Pto. Fixo, C_n converge para um valor $C \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
6.b) Por a), sabemos que o ponto fixo está no intervalo $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.
Assim, aplicando o mét. ponto fixo a $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, temos

$$L = \max_{x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} |g'(x)| = \max_{x\in[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} \frac{3}{4}(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{16}$$

Escolhendo $C_0 = \frac{1}{4}$, obtemos $C_1 = \frac{1}{4}(\frac{1}{4^3} + 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{256}$, com erro absoluto:
$|C - C_0| \leq \frac{1}{1-L} |C_1 - C_0| = \frac{16}{13} \frac{1}{256} = \frac{1}{13\times16}$,
por outro lado, como $|C| \geq \frac{1}{4}$, o erro relativo é majorado por

$$|\delta_C| = \frac{|C - C_1|}{|C|} \leq \frac{L|C - C_0|}{|C|} \leq 4 \frac{3}{16} \frac{1}{13 \times 16} = \frac{12}{13} \frac{1}{256} < 0.01.$$

Concluímos que $C_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{256}$ aproxima C com erro relativo inferior a 1%.