Instituto Superior Técnico. Departamento de Matemática.
Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica.
Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação (2004/05).
1º Exame de Análise Numérica II : *10 de Janeiro de 2004*, 17h00 (+2h30).

O exame está cotado de 0 a 14 (a nota mínima é 6).

1. Pretende-se aproximar a trajectória de uma partícula P que: **(i)** no instante inicial $t = 0$, está na posição $P(0) = 1$, com velocidade nula $P'(0) = 0$; **(ii)** no instante $t = 1$, está na posição $P(1) = -1$, com velocidade $P'(1) = -4$, e aceleração $P''(1) = 2$; **(iii)** finalmente, no instante $t = 2$, atinge a posição $P(2) = 9$.

a)$_{[2.0]}$ Determine p, o polinómio interpolador de Hermite que verifica as condições (i)+(ii)+(iii). Indique uma aproximação para a aceleração no instante inicial.

b)$_{[1.0]}$ Admita que $\left|P^{(6)}(t)\right| < 4!$, para $t \in [0, 2]$. Determine um majorante para o erro de interpolação de a).

2. Suponha que a evolução da posição P de uma partícula, inicialmente com $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ é descrita pela equação diferencial

$$P''(t) - P(t)P'(t) = t$$

a)$_{[1.5]}$ Determine a aproximação de $P(2)$ dada pelo método de Euler com $h = 1$.

b)$_{[2.0]}$ O mesmo que em a), mas usando o método de Adams-Bashforth de ordem 2, $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{h}{2}(3\mathbf{F}_n - \mathbf{F}_{n-1})$, inicializado pelo método de Runge-Kutta do ponto-médio.

3. a) $_{[1.5]}$ Mostre que o spline cúbico natural s que interpola uma função f nos nós $\{-2, 0, 2\}$, em que $f(-2) = 3, f(0) = 1, f(2) = 7$, é dado por

$$s(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{4}x^2 r(x)$$

com $r(x) = 2 + x$ se $x \in [-2, 0]$ e $r(x) = 2 - x$ se $x \in [0, 2]$.

b)$_{[1.0]}$ Calcule aproximadamente

$$||s''||^2_{L^2[-2,2]} = \int_{-2}^{2} s''(t)^2 dt$$

usando a Regra de Simpson com 5 nós.

c)$_{[1.0]}$ Determine o valor exacto de

$$\min\{||f''||_{L^2[-2,2]} : f \in C^2[-2, 2] \wedge f(-2) = 3 \wedge f(0) = 1 \wedge f(2) = 7\}.$$

d)$_{[1.0]}$ Determine o polinómio em $\mathcal{P}_3$ que é a melhor aproximação uniforme de $f(x) = x^3(x + 1)$ no intervalo $[-1, 1]$.

4. Seja $f \in C^1[0, m]$, com $m \in \mathbb{N}_2$. Considere o funcional $A : C^1[0, m] \to \mathbb{R}$ tal que

$$A(f) = \sum_{k=0}^{m} f'(k).$$

a)$_{[2.0]}$ Determine uma aproximação de A da forma $\tilde{A} = \alpha\delta_0 + \beta\delta_m$ usando o método dos coeficientes indeterminados (δ_x designa o funcional Delta de Dirac em x).

A fórmula obtida tem grau 1 ou superior? Justifique.

Partindo da aproximação obtida, conclua que

$$\sum_{k=0}^{m} k^p \approx \frac{m+1}{p+1} m^p$$

b)$_{[1.0]}$ Se $f \in C^3[0, m]$, mostre que existe $\xi \in [0, m]$:

$$A(f) = f(m) - f(0) + \frac{f'(m) + f'(0)}{2} + \frac{f'''(\xi)m}{12}.$$