Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática – **Instituto Superior Técnico**

Análise Numérica II

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação
3^o Trabalho computacional - 2004/05
Trabalho para todos os grupos

1. Considere um funcional linear $A : D(A) \subseteq C(I) \to \mathbb{R}$, uma lista de nós $\mathbf{z} = \{z_1, \cdots, z_n\} \in I$, e uma lista com uma base de funções $\mathbf{f} = \{f_1, \cdots, f_n\} \subset D(A)$. Pretende-se implementar uma função AproxFuncional$[A, \mathbf{z}, \mathbf{f}, \phi]$ em *Mathematica* que devolva um funcional aproximado $\tilde{A}$ aplicado a ϕ, ou seja,

$$\tilde{A}(\phi) = \sum_{k=1}^{n} w_k \phi(z_k),$$

que seja exacto no subespaço $F =< f_1, \cdots, f_n >$.

a) Implemente um algoritmo em *Mathematica* que permita obter AproxFuncional. Aplique este algoritmo para deduzir as fórmulas simples da Regra dos Trapézios e de Simpson. Obtenha duas outras fórmulas, para derivação e integração usando um subespaço F não polinomial.

b) Seja $h > 0, z \in \mathbb{R}$. Apresente fórmulas para a aproximação dos funcionais

$$D(f) = f'''(z), \quad I(f) = \int_{z}^{z+h} f(t)\, dt, \quad J(f) = \int_{z-h}^{z+h} f(t) t^2\, dt$$

usando o algoritmo anterior com os nós $\{z - 2h, z - h, z + h, z + 2h\}$ e um subespaço polinomial F. Determine o grau da fórmula. No caso de $D(f) = f'''(z)$ apresente uma estimativa de erro.

c) Considere duas funções $f \in C^\infty[-2, 2]$, à sua escolha, e aplique a fórmula deduzida em b) para aproximar f''' nesse intervalo. Para esse efeito, considere z a variar no intervalo $[-2 + 2h, 2 - 2h]$, com dois espaçamentos $h > 0$ diferentes. Compare graficamente com os valores exactos, e comente o erro absoluto face ao resultado teórico.

d) Implemente um algoritmo Simpson$[f, \{a, b\}, \varepsilon]$ em *Mathematica* tal que, dado um intervalo $[a, b]$, uma função $f \in C^4[a, b]$, e um espaçamento de subintervalos próximo de $\varepsilon > 0$, permita obter o valor da aproximação do integral dado pela Regra de Simpson composta. Apresente dois exemplos e num desses casos discuta a estimativa de erro.

2. a) Implemente algoritmos em *Mathematica* para os métodos Euler explícito e de Runge-Kutta do ponto-médio, tais que, dada uma função $f(x, y)$, valores iniciais t_0, u_0, e um espaçamento h, se obtenha uma aproximação da solução da equação diferencial $u'(t) = f(t, u(t))$, com condições iniciais $u(t_0) = u_0$. *(Nota: o algoritmo deve admitir o caso vectorial.)*

b) Efectue simulações orbitais considerando

$$\mathbf{u}''(t) = \sum_{k=1}^{c} M_k \frac{\mathbf{s}_k - \mathbf{u}(t)}{|\mathbf{s}_k - \mathbf{u}(t)|^3}$$

para um certo número de massas/cargas $M_1, \cdots, M_c$, escolhendo também como fixas as posições $\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_c \in \mathbb{R}^2$. A notação $| \cdot |$ representa a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Dada a posição inicial da partícula $\mathbf{u}(t_0) \in \mathbb{R}^2$, e um vector inicial de velocidade $\mathbf{u}'(t_0) \in \mathbb{R}^2$, coloque num gráfico a evolução da posição dada pelos pontos $\mathbf{u}(t_n)$, até um certo tempo final t_N. Compare os resultados da aplicação dos métodos de Euler e Runge-Kutta em a), com o resultado de NDSolve.

Num de três exemplos, escolha apenas duas massas $M_1 = M_2 = 10$, posicionando-as em $\mathbf{s}_1 = (0, 0), \mathbf{s}_2 = (10, 10)$, e escolha a posição inicial $\mathbf{u}(0) = (-10, 0)$, a velocidade inicial $\mathbf{u}'(0) = (0, -1.2)$, uma discretização com passo $h = 0.1$, até atingir o tempo $t_N = 500$. Apresente os resultados para os dois métodos e compare com NDSolve.