exercícios de análise numérica II

lic. matemática aplicada e computação (2004/05)

aulas práticas - capítulo 1

Exercício 1.1 Mostre que a soma dos polinómios base de Lagrange é a função constante $\equiv 1$.

Exercício 1.2 Usando a fórmula interpoladora de Lagrange determine a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.3 Considere a tabela de interpolação para uma função f,

x	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_1	$\cdots$	f_n

.

Prove que existe uma e uma só função da forma

$$F_N(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{kx}$$

para a qual se tem $F(x_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

Exercício 1.4 Considere a tabela de interpolação para os valores de uma função $f(x_k) = f_k$

x_1	$\cdots$	x_n
f_1	$\cdots$	f_n

Pretende-se uma função da forma (com $\beta > 0$)

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(x - x_k)^2 + \beta}$$

tal que $S_N(x_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, N)$.

a) Escreva o sistema que permite obter os coeficientes c_k.

b) Mostre que existe sempre um $\beta > 0$ tal que o sistema tenha uma e uma só solução.

c) Para $\beta = 1$, determine S_N relativo à tabela

x_k	-1	1	3	4	6
f_k	1	-1	10	0	1

(usando o *Mathematica*).

Exercício 2.1 Considere o problema de interpolação geral, usando quaisquer funções $u_1, \cdots, u_n$ definidas (pelo menos) nos pontos $x_1, \cdots, x_n$, que são os nós de interpolação. Ou seja, pretende-se determinar os coeficientes $a_1, \cdots, a_n$ de forma a que

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k u_k(x)$$

verifique $s_n(x_1) = f_1, \cdots, s_n(x_n) = f_n$.

a) Defina $\mathbf{A}$ a matriz do sistema, e mostre que se

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

então o problema de interpolação tem solução e é única.

b) Considere $u_1(x) = 1, u_2(x) = x, u_3(x) = g(x)$, em que g é ímpar, e a tabela

x	$-\alpha$	0	α
$f(x)$	β_1	0	β_2

,

com $\alpha > 0$. Mostre que:

– se $\beta_1 = -\beta_2$ então a solução não é única;

– se $\beta_1 \neq -\beta_2$ a solução não existe.

Exercício 2.2 Seja h o espaçcamento dos nós $x_0, \ldots, x_n$. Mostre que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^k}.$$

Exercício 2.3 Suponha que $|f^{(k)}(x)| \leq k!$, para qualquer $k \in \mathbb{N}_2, x \in \mathbb{R}$, e considere a tabela

x	1	3	5	7
$f(x)$	1	3	2	3

.

a) Construa a tabela de diferenças progressivas e determine a expressão do polinómio interpolador através dessa tabela.

b) Calcule um valor aproximado para $f(4)$ e determine um majorante para o erro de interpolação.

c) Calcule a expressão do polinómio interpolador, usando diferenças divididas. Justifique que $\exists \xi \in]1, 7[$: $|f''(\xi)| \geq \frac{3}{4}$.

Exercício 3.1 Seja P_m um polinómio qualquer, de grau m, e considere $x_0, \cdots, x_n$ nós distintos.

Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$P_m[x_0, \cdots, x_n, x] = \begin{cases} q_{m-n-1}(x) & \text{se } n < m-1 \\ a_m & \text{se } n = m-1 \\ 0 & \text{se } n > m-1 \end{cases},$$

em que q_{m-n-1} é um polinómio de grau $m-n-1$ e a_m é o coeficiente de x^m em P_m.

Exercício 3.2 Considere a tabela de interpolação

x	1	3	5	7
$q(x)$	1	3	2	3

,

em que q é um polinómio (de grau desconhecido).

Sabendo que $q[-1, 1, 2] = 4$ e que $q[-1, 1, 2, 4, x] = 3, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2, 4\}$, determine q.

Exercício 3.3 *Interpolação Inversa.* Seja f uma função injectiva em $[-1,3]$ tal que:

x	-1	0	2	3
$f(x)$	2	-1	-4	-5

.

a) Determine uma aproximação de f^{-1} em $[-5,2]$ usando a interpolação polinomial.
b) Usando a), determine um valor aproximado para a raiz de f em $[-1,3]$.
c) Indique em que casos o polinómio interpolador da função inversa coincide com a inversa do polinómio interpolador.

Exercício 4.1 Considere o polinómio de grau $n+1$

$$w_n(t) = \prod_{k=0}^{n}(t-k)$$

e mostre que:

$$\text{a)} \begin{cases} w_n(\frac{n}{2}-t) = w_n(\frac{n}{2}+t) & \text{se } n \text{ ímpar} \\ w_n(\frac{n}{2}-t) = -w_n(\frac{n}{2}+t) & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} |w_n(t+1)| < |w_n(t)| & \text{se } t \in]0, \frac{n}{2}-1[\\ |w_n(t)| < |w_n(t+1)| & \text{se } t \in]\frac{n}{2}, n-1[\end{cases}$$

excepto para $t = 0, \cdots, n-1$, em que $w_n(t) = w_n(t+1) = 0$.
c) Conclua que $|w_n(t)| < n!$ para $t \in]0, n[$

Exercício 4.2 Pretende-se aproximar a função $f(x) = x^3$ por um polinómio de grau ≤ 2 de forma a que

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|$$

seja mínimo.

Exercício 4.3 Seja p_n o polinómio interpolador de $f \in C^{n+1}$ em $x_0, \cdots, x_n \in [a,b]$.
a) Mostre que se existir $M > 0$ tal que $||f^{(n+1)}||_\infty \leq M^n$ então $\lim_{n\to\infty} ||f - p_n||_\infty = 0$, ou seja, há convergência uniforme da sucessão de funções definida pelos polinómios interpoladores p_n (para quaisquer nós distintos) em $[a,b]$.
b) Conclua acerca da convergência uniforme quando $f(x) = \sin(\alpha x)$ e $f(x) = e^{\alpha x}$.

Exercício 5.1 Considere a seguinte tabela para a interpolação de Hermite (geral), em que são apenas considerados dois nós x_0 e x_1

x_0	$f(x_0) = f_0$	$\cdots$	$f^{(n)}(x_0) = f_0^{(n)}$	
x_1	$f(x_1) = f_1$	$\cdots$	$\cdots$	$f^{(m)}(x_1) = f_1^{(m)}$

.

a) Apresente as condições que definem a base canónica e escreva a expressão geral do polinómio interpolador nessa base.
b) Deduza a fórmula para o erro de interpolação.

Exercício 5.2 Seja $f \in C[a,b]$ e p_n o polinómio interpolador de Lagrange para os nós $x_0, \cdots, x_n$.
Mostre que

$$||f - p_n||_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{q\in\mathcal{P}_n} ||f - q||_\infty$$

em que $\mathcal{P}_n$ é o conjunto de polinómios de grau $\leq n$ e Λ_n é a constante de Lebesgue.

Exercício 5.3 Considere a tabela de interpolação

x_i	-2	4	6
f_i	2.1	0.1	2.8
$\tilde{f}_i$	2	0	3

em que consideramos $\tilde{f}_i$ os valores aproximados para f_i.

a) Determine um majorante para a constante de Lebesgue em $[-2, 6]$.

b) Apresente uma estimativa para o erro absoluto da interpolação aproximada face à interpolação exacta.

Exercício 6.1 Mostre que

$$\sum_{j=0}^{2n} e^{2\pi i \frac{(n-k)j}{2n+1}} = (2n+1)\delta_{nk}.$$

Exercício 6.2 Sejam $\mathbf{f} = (f_0, \cdots, f_{n-1}), \mathbf{g} = (g_0, \cdots, g_{n-1})$. Mostre as igualdades,
(Plancherel)

$$\frac{1}{N}\langle \mathcal{F}(\mathbf{f}), \mathcal{F}(\mathbf{g})\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$$

(Parseval)

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\,||\mathcal{F}(\mathbf{f})|\,|_2 = ||\mathbf{f}||_2$$

em que $\mathcal{F}$ é a Transformação de Fourier Discreta (TFD)

$$\mathcal{F}(\mathbf{f})_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{2\pi i \frac{kn}{N}}, \quad (k = 0, \cdots, N-1).$$

Exercício 6.3 *FFT- Fast Fourier Transform.*
Mostre que se $N = 2^M$, o cálculo da TFD pode ser decomposto sucessivamente no cálculo de duas TFD com metade dos pontos. Atendendo a que o cálculo da TFD envolve $O(N^2)$ operações, verifique que esta decomposição permite reduzir o número de operações para $O(N\log_2(N))$.

Sugestão:

a) Seja $(F_1, \cdots, F_N)$ *o vector dado pela TFD. Verifique que*

$$F_{2k} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_n + f_{n+\frac{N}{2}})e^{-2\pi i \frac{(2k)n}{N}}$$

$$F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_n - f_{n+\frac{N}{2}})e^{-2\pi i \frac{(2k+1)n}{N}}$$

b) Para o cálculo de operações, utilize a sucessão $v_m = m2^m$ *e a relação de* v_{m+1} *com* v_m.

Exercício 7.1 Seja $p \in \mathcal{P}_3$ e considere os nós x_0, x_1, x_2, x_3. Mostre que a solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_1+h_0}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_2+h_1}{3} & \frac{h_2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p[x_0, x_1] - p'(x_0) \\ p[x_0, x_1, x_2](x_2 - x_0) \\ p[x_1, x_2, x_3](x_3 - x_1) \\ p'(x_3) - p[x_2, x_3] \end{bmatrix},$$

com $h_k = x_{k+1} - x_k$ é dada por $\sigma_k = p''(x_k)$.

Exercício 7.2 Seja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e considere os $N+1$ nós de interpolação $x_0 = -5, \cdots, x_N$ igualmente espaçados de h.

a) Determine o valor máximo para h, de forma a garantir um erro global de interpolação inferior a 10^{-6}, usando *splines* lineares.

b) O mesmo que em a), usando *splines* cúbicos.

c) Justifique que a interpolação por *splines* lineares ou cúbicos é convergente, usando nós igualmente espaçados, ao contrário do que acontece na interpolação polinomial (exemplo de Runge).

Exercício 7.3 Seja s o *spline* cúbico interpolador de f no intervalo $[x_0, x_N]$ para o conjunto de nós $\{x_0, \cdots, x_N\}$ (igualmente espaçados), com condição da derivada nos extremos. Mostre que:

(a) $||f-s||_\infty \leq \frac{h^2}{8}||f''-s''||_\infty$, (b) $||s''||_\infty \leq 3||f''||_\infty$, (c) $||f''-s''||_\infty \leq \frac{h^2}{2}||f^{(4)}||_\infty$.

Conclua que

$$||f-s||_\infty \leq \frac{h^4}{16}||f^{(4)}||_\infty.$$

Sugestões:

– em (b), verifique que $4\sigma_k = 6f''(\xi_k) - \sigma_{k-1} - \sigma_{k+1}$, *para* $k = 1, \cdots, N-1$.

– em (c), escolha um função g *tal que* g'' *seja o spline linear interpolador de* f'' *e use a alínea b).*

Exercício 8.1

a) Determine o valor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que minimiza o funcional

$$J(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b\cos(x))^2 dx.$$

b) Determine o valor $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ que minimiza o funcional

$$J(a,b,c) = \int_{-1}^{1} \frac{(a - c + bx + 2cx^2 - \sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Exercício 8.2 Considere $V_0(x) = 1, V_1(x) = g(x)$, com g ímpar, definida no intervalo $[-A, A]$. Determine uma expressão para V_2 de forma a que $\{V_0, V_1, V_2\}$ seja uma base polinomial de $\mathcal{P}_2$, ortogonal em $L^2[-A, A]$. Apresente uma fórmula recursiva para obter uma base ortogonal para polinómios de grau superior.

Exercício 8.3 Pretende-se aproximar uma função $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ no sentido dos mínimos quadrados, para o produto interno $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(a)\bar{v}(x)dx$ usando funções da forma

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{ikx}, \qquad \text{com } a_k \in \mathbb{C}.$$

Deduza o sistema normal que permite a resolução deste problema.

Exercício 9.1 Considere uma constante $K \neq 0$ e uma função $f \in C^1[a,b]$, $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a,b]$.
Mostre que, dado $g \in C[a,b]$, existe uma e uma só melhor aproximação uniforme $F \in \langle K, f \rangle$.

Exercício 9.2

a) Determine a melhor aproximação uniforme $g(x) = x^2$ em $F = \langle 1, x \rangle \subset C[0,2]$.
Sugestão: Usar o algoritmo de Remes nos pontos $\{0,1,2\}$.

b) Compare com a melhor aproximação no sentido dos mínimos quadrados (caso contínuo).

Exercício 9.3 Mostre que a matriz do sistema no Algoritmo de Remes é invertível se a condição de Haar for verificada.