$\chi-$ **Resolução** (AN-II: Exame de 10 de Janeiro de 2005)

1a) Obtemos pela tabela de diferenças divididas generalizada:

$x_0 = 0$		$x_0 = 0$		$x_1 = 1$		$x_1 = 1$		$x_1 = 1$		$x_2 = 2$
$P_0 = 1$		$P_0 = 1$		$P_1 = -1$		$P_1 = -1$		$P_1 = -1$		$P_2 = 2$
	$P_0' = 0$		-2		$P_1' = -4$		$P_1' = -4$		10	
		-2		-2		$\frac{1}{2}P_1'' = \frac{2}{2} = 1$		14		
			0		3		13			
				3		$\frac{13-3}{2-0} = 5$				
					$\frac{5-3}{2-0} = 1$					

e assim, pela F. Newton generalizada,

$$\begin{aligned} p_5(x) &= 1 + 0 - 2x^2 + 0 + 3x^2(x-1)^2 + x^2(x-1)^3 \\ &= 1 - 2x^2 + x^2(x-1)^2(x+2) = 1 - 3x^3 + x^5 \end{aligned}$$

logo $p_5''(x) = -18 + 20x^{3,}$ o que implica $p_5''(0) = 0$.

1b) O erro de interpolação é majorado para $t \in [0, 2]$ por

$$|E(t)| = |P(t) - p_5(t)| \leq \frac{|P^{(6)}(\xi)|}{6!}|t|^2|t-1|^3|t-2| \leq \frac{4!}{6!}2^2 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{4}{15}.$$

2a) Reescrevemos a equação diferencial, usando $u(t) = P(t)$ e $v(t) = P'(t) = u'(t)$.
Logo,

$$\begin{bmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(t) \\ u(t)v(t) + t \end{bmatrix} \Rightarrow F(t, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y \\ xy + t \end{bmatrix}$$

inicializamos com $\left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u(0) \\ v(0) \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, pelo método de Euler $\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] + hF(t_0, \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + 1\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0+0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, e de forma semelhante, $\left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] + hF(t_1, \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + 1\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0+1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Logo $P(2) \approx u_2 = 1$.

2b) Inicializando com R-K ponto-médio,
$\left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] + hF(t_0 + \frac{h}{2}, \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right] + \frac{h}{2}F(t_0, \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right])) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + F(\frac{1}{2}, \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \frac{1}{2}F(0, \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right])) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + F(\frac{1}{2}, \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right]$.
Aplicando Adams-Bashforth,
$\left[\begin{smallmatrix} u_2 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v_1 \end{smallmatrix}\right] + \frac{h}{2}(3F(t_1, \left[\begin{smallmatrix} u_1 \\ v1 \end{smallmatrix}\right]) - F(t_0, \left[\begin{smallmatrix} u_0 \\ v_0 \end{smallmatrix}\right])) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1/2 \end{smallmatrix}\right] + \frac{1}{2}(3\left[\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2+1 \end{smallmatrix}\right] - 0) = \left[\begin{smallmatrix} 7/4 \\ 11/4 \end{smallmatrix}\right]$.
Logo $P(2) \approx u_2 = \frac{7}{4}$.

3a) Designamos s por s_1 quando $x \in [-2, 0]$ e por s_2 quando $x \in [0, 2]$.
Vamos verificar que se trata de um spline cúbico natural e interpolador, basta verificar que
i) s é spline cúbico porque s_1 e s_2 são polinómios P_3 e $s \in C^2[-2, 2]$,
porque $s_1(0) = 1 = s_2(0)$, e também $s_1'(0) = 1 = s_2'(0)$ porque
$s_1'(x) = 1 + 2x + x(2+x)/2 + x^2/4$ e $s_2'(x) = 1 + 2x + x(2-x)/2 - x^2/4$;
finalmente $s_1''(0) = 3 = s_2''(0)$ porque
$s_1''(x) = 2 + x + 1 + x/2 = 3 + \frac{3}{2}x$ e $s_2''(x) = 2 + 1 - x - x/2 = 3 - \frac{3}{2}x$.
ii) s verifica a condição natural porque $s_1''(-2) = 3 - 3 = 0$ e $s_2''(+2) = 3 - 3 = 0$.
iii) é interpolador porque $s(-2) = s_1(-2) = 1 - 2 + (-2)^2 + 0 = 3 = f(-2) \wedge s(0) = 1 = f(0) \wedge s(2) = s_2(2) = 1 + 2 + 2^2 + 0 = 7 = f(2)$.

3b) Aplicando a R. Simpson composta (aqui $f(t) = s''(t)^2$), usando os nós $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ obtemos

$$\begin{aligned} ||s''||^2_{L^2(-2,2)} &= \int_{-2}^{2} s''(t)^2 dt = \frac{1}{3}(s_1''(-2)^2 + 4s_1''(-1)^2 + s_1''(0)^2) + \frac{1}{3}(s_2''(0)^2 + 4s_2''(1)^2 + s_2''(2)^2) \\ &= \frac{1}{3}(0^2 + 4(\frac{3}{2})^2 + 3^2) + \frac{1}{3}(3^2 + 4(\frac{3}{2})^2 + 0^2) = 12. \end{aligned}$$

notando que $s_1''(-1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ e que $s_2''(+1) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

3c) O valor obtido na alínea anterior é exacto porque foi obtido aplicando a R. Simpson separadamente a polinómios de grau 2, já que s_1'' e a s_2'' são ambos polinómios de grau 1. Pela teoria, sabemos que o spline cúbico é a função interpoladora que minimiza $||f''||_{L^2(-2,2)}$ portanto o valor o mínimo é exactamente $||s''||^2_{L^2(-2,2)} = \sqrt{12}$.

3d) Usando o polinómio de Chebyshev, $T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, mais concretamente o polinómio mónico $\hat{T}_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8}$, sabemos que

$$||\hat{T}_4||_\infty \leq ||q_4||_\infty$$

em que q_4 é qualquer polinómio mónico. Em particular, procuramos $p_3 \in P_3$ tal que $f(x) - p_3(x) = x^4 + x^3 - p_3(x) = q_4(x)$ (é um polinómio mónico do quarto grau) seja mínimo. Na norma uniforme o valor é minimizado usando $\hat{T}_4$. Basta fazer $f(x) - p_3(x) = \hat{T}_4(x)$, logo $p_3(x) = f(x) - \hat{T}_4(x) = x^4 + x^3 - (x^4 - x^2 + \frac{1}{8}) = x^3 + x^2 - \frac{1}{8}$.

4a) Temos $A(f) = \sum_{k=0}^m f'(k)$ e $\tilde{A}(f) = \alpha f(0) + \beta f(m)$. Pelo método dos coeficientes indeterminados, $0 = A(1) = \tilde{A}(1) = \alpha + \beta$. Por outro lado, $m + 1 = \sum_{k=0}^m 1 = A(x) = \tilde{A}(x) = \alpha \cdot 0 + \beta m$.
obtemos $\beta m = m + 1$ e $\alpha + \beta = 0$, logo $\tilde{A}(f) = \frac{m+1}{m}(f(m) - f(0))$.
Por construção tem grau 1, e tem mesmo grau 2, porque $(m + 1)m = \sum_{k=0}^m 2k = A(x^2) = \tilde{A}(x^2) = \frac{m+1}{m}(m^2 - 0) = (m + 1)m$.
Aplicando a fórmula a $f(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ temos $f'(x) = x^p$ e assim

$$\sum_{k=0}^m k^p = A(\frac{x^{p+1}}{p+1}) \approx \tilde{A}(\frac{x^{p+1}}{p+1}) = \frac{m+1}{m}(\frac{m^{p+1}}{p+1} - 0) = \frac{m+1}{p+1}m^p.$$

4b) Usando a regra dos trapézios, com $h = 1$ no intervalo $[0, m]$,

$$\int_0^m f'(t)dt = 1(\frac{f'(0) + f'(m)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} f'(k)) - \frac{f'''(\xi)}{12}(m - 0)$$

logo

$$f(m) - f(0) = \frac{f'(0) + f'(m)}{2} + \sum_{k=0}^m f'(k) - (f'(0) + f'(m)) - \frac{f'''(\xi)}{12}m$$

$$A(f) = \sum_{k=0}^m f'(k) = f(m) - f(0) + \frac{f'(0) + f'(m)}{2} + \frac{f'''(\xi)}{12}m.$$