

Duração: 90 minutos

2º teste C

**Justifique convenientemente todas as respostas!**

**Grupo I**

10 valores

1. Seja  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  uma amostra aleatória da variável aleatória  $X$  com função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-4)}, & x > 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$ .

- (a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança de  $\lambda$  baseada na concretização de uma amostra aleatória de dimensão 40 de  $X$  tal que  $\sum_{i=1}^{40} x_i = 177.86$ . (3.5)

**Solução:** 2.2396

- (b) Obtenha o valor da constante  $a$  tal que o estimador  $T = a + \bar{X}$  seja centrado para  $\theta = \frac{1}{\lambda}$ , podendo usar para o efeito o que conhece sobre a distribuição exponencial. (1.5)

**Solução:**  $a = -4$

2. Um relatório de uma companhia de águas afirma que 40% dos poços artesianos da região litoral de Portugal têm água salobra (i.e., resulta da mistura de água doce com água salgada) e imprópria para consumo. Para testar a afirmação da empresa, foi avaliada a qualidade da água de 400 poços dessa região, escolhidos ao acaso, tendo-se registado que em 120 a água é efetivamente salobra.

- (a) Teste a afirmação da empresa, para um nível de significância de aproximadamente 3%. (3.5)

**Solução:** Rejeitar  $H_0 : p = 0.4$  contra  $H_1 : p \neq 0.4$  uma vez que o valor observado da estatística de teste,  $-4.0825$ , pertence à região de rejeição  $]-\infty, -2.1701[ \cup ]2.1701, +\infty[$ .

- (b) Calcule o valor-p do teste da alínea (a) e comente o valor obtido. (1.5)

**Solução:** Rejeitar  $H_0$  para níveis de significância superiores ou iguais ao valor- $p \approx 5 \times 10^{-5}$  e não rejeitar no caso contrário.

**Grupo II**

10 valores

1. Um produtor de vinhos pretende plantar uma vinha com a casta Touriga Nacional. Antes de tomar a sua decisão, analisou 190 pés de videira dessa casta de uma vinha existente nas redondezas, e para cada pé contou o número de cachos existentes, tendo registado as seguintes observações: (4.0)

Cachos	{0,1}	2	3	4	$\geq 5$
Nº de pés	22	29	47	54	38

Teste a hipótese de o número de cachos por pé possuir distribuição de Poisson de valor esperado 4, ao nível de significância de 1%.

**Solução:** Rejeitar  $H_0 : X \sim Poi(4)$  uma vez que o valor observado da estatística de teste, 26.568, pertence à região de rejeição  $]13.28, +\infty[$ .

2. Um fabricante de processadores de computador está interessado em estudar a relação entre a temperatura do processador  $Y$ , em °C, e a sua velocidade de processamento  $x$ , em MHz, para o que recolheu a seguinte amostra:

$x_i$	350	360	370	380	390	400	410
$y_i$	31.4	35.6	41.8	51.0	56.8	62.8	67.4

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 2660, \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 1013600, \sum_{i=1}^7 y_i = 346.8, \sum_{i=1}^7 y_i^2 = 18314.4, \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 133558.0.$$

Considerando o modelo de regressão linear simples com as hipóteses de trabalho usuais, com  $x$  como variável explicativa e  $Y$  como variável resposta:

- (a) Estime a reta de regressão de mínimos quadrados e a variância da variável resposta. (2.5)

**Solução:**  $\hat{E}[Y | x] = -191.2143 + 0.6336x$  para  $x \in [350, 410]$  e  $\hat{\sigma} = 1.7963$ .

- (b) Construa um intervalo de confiança a 90% para o valor esperado da temperatura de um processador com frequência 355 MHz. É correto utilizar o mesmo procedimento para obter um intervalo de confiança para o valor esperado da temperatura de um processador com frequência 420 MHz? Justifique. (3.5)

**Solução:**  $IC_{90\%}(\beta_0 + 355\beta_1) = [32.07, 35.34]$ . Não é aconselhável utilizar o mesmo procedimento para a frequência de 420 MHz uma vez que este valor está fora da gama de valores de  $x$  para os quais o modelo foi ajustado.