Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

1º semestre – 2015/2016
26/01/2016 – 15:00

Duração: 90 minutos **2º teste**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I	10 valores

1. Admita que o tempo de vida em centenas de horas, X, de um novo tipo de lâmpadas de longa duração segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, $\lambda > 0$, desconhecido. Com o objetivo de estimar λ, registaram-se as durações $(x_1, x_2, \ldots, x_{12})$ de 12 lâmpadas desse tipo, tendo-se obtido $\sum_{i=1}^{12} x_i = 480$. Com base na amostra obtida:

(a) Determine a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro λ. (3.0)

Solução: 1/40

(b) Calcule a estimativa de máxima verosimilhança da probabilidade de uma lâmpada desse tipo durar mais de 40 centenas de horas. (1.5)

Solução: 0.3679

2. Numa sondagem aleatória a 300 habitantes da Grande Lisboa que utilizam o automóvel para ir de casa para o emprego, constatou-se que, entre os mesmos, 100 tencionam passar a utilizar o metropolitano quando este chegar à sua zona de residência. Com base nos resultados desta sondagem:

(a) Deduza um intervalo de confiança a aproximadamente 95% para a proporção populacional, p, de habitantes da Grande Lisboa que tencionam passar a utilizar o metropolitano quando este chegar à sua zona de residência. (3.0)

Solução: $\mathrm{IC}_{\approx 0.95}(p) = [0.2780, 0.3867]$

(b) Quantos habitantes adicionais devemos sondar para estarmos confiantes a aproximadamente 90% que a margem de erro de estimação de p seja menor que 3%? (2.5)

Solução: 369 (ou 452 para $\bar{x} = 1/2$)

Grupo II	10 valores

1. As garrafas de um certo refrigerante devem ter um conteúdo de 200 ml (quantidade nominal). Observadas ao acaso 100 garrafas, mediu-se o desvio dos seus conteúdos em relação à quantidade nominal e obteve-se:

Desvio (ml)	$]-5,-3]$	$]-3,0]$	$]0,3]$	$]3,5]$
Frequência absoluta	6	45	44	5

Teste ao nível de significância de 1%, a hipótese de que os desvios face à quantidade nominal possuem distribuição normal com valor esperado nulo e desvio padrão 2 ml. (4.0)

Solução: $q_0 = 0.5676$ e valor-p$= 0.9038$. Não se rejeita H_0 ao nível de significância de 1%.

2. É esperado que o custo de manutenção de um certo tipo de máquinas aumente com a respetiva idade. Para estudar o efeito da idade de uma máquina, x, no seu custo de manutenção, foram registados os custos de manutenção no último ano em centenas de euros, Y, para 12 máquinas desse tipo. Admitindo a validade do modelo de regressão linear simples e sabendo que foram obtidos os seguintes resultados:

x_i (em anos)	1.0	1.5	2.0	3.0	3.0	3.5	4.0	4.0	5.0	5.0	6.0	7.0
y_i (em centenas de euros)	22	20	22	21	23	25	24	27	25	27	26	29

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 45,\ \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 204.5,\ \sum_{i=1}^{12} y_i = 291,\ \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 7139,\ \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 1138.5.$$

(a) Determine a equação da reta de regressão de mínimos quadrados. (1.5)

Solução: $\hat{E}[Y \mid x] = 19.2937 + 1.3217x,\ x \in [1,7]$

(b) Calcule a estimativa pontual do custo esperado de manutenção de uma máquina no seu 5º ano de funcionamento. É correto utilizar o mesmo procedimento aplicado ao 10º ano de funcionamento de uma máquina? Justifique. (1.5)

Solução: $\hat{E}[Y \mid x = 5] = 25.9021$. Para $x = 10$ o valor que se pode obter seria uma extrapolação uma vez que o modelo foi ajustado para $x \in [1,7]$.

(c) Teste a hipótese de que o incremento anual no valor esperado do custo anual de manutenção de uma máquina é igual a 100 euros. Decida com base no valor-p. (3.0)

Solução: $t_0 = 1.3669$ e valor-p$= 0.2016$. Não se rejeita $H_0 : \beta_1 = 1$ aos níveis de significância habituais ($[0.01, 0.1]$).