DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2015/2016
29/06/2016 – **15:00**

Duração: 90 minutos **2º teste**

Justifique convenientemente todas as respostas!

Grupo I 10 valores

1. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ uma amostra aleatória proveniente da população X com distribuição Binomial$(2, p)$, com $0 < p < 1$.

(a) Deduza a estimativa de máxima verosimilhança do parâmetro p sabendo que a concretização da amostra aleatória conduziu a $\sum_{i=1}^m x_i = \frac{m}{2}$. (3.0)

Solução: $\hat{p} = \frac{1}{4}$

(b) Averigúe se $\left(\frac{\bar{X}}{2}\right)^2$ é um estimador centrado de p^2. (1.5)

Solução: $\left(\frac{\bar{X}}{2}\right)^2$ não é um estimador centrado de p^2.

2. Admita que determinados erros de medição, cometidos por um biólogo ao lidar com certo tipo de células, são bem modelados por uma variável aleatória X com distribuição Normal$(\mu, 1)$ e que, para fazer inferências sobre o parâmetro μ, é recolhida uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X.

(a) Obtenha um intervalo aleatório de confiança a 95% para o parâmetro μ e determine a dimensão mínima que a amostra deve ter para que a amplitude desse intervalo não seja superior a 1. (3.0)

Solução: $IAC_{95\%}(\mu) = \left[\bar{X} - \frac{1.96}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right]$; $n_{min} = 16$.

(b) Supondo $n = 25$ e $\bar{x} = -0.2$, teste $H_0 : \mu = 0$ versus $H_1 : \mu < 0$. Decida com base no valor-p. (2.5)

Solução: $z_0 = -1$; valor-p=0.1587.

Grupo II 10 valores

1. Uma empresa seguradora baseia o seu sistema de prémios, para determinado risco, na premissa de que o número anual de sinistros por apólice possui distribuição de Poisson de parâmetro 0.2. Recolhida uma amostra de 1000 apólices referentes ao ano anterior, observou-se: (4.0)

Número anual de sinistros por apólice	0	1	≥ 2
Número de apólices	800	175	25

Verifique, aplicando um teste apropriado, se a amostra põe em causa a premissa da seguradora ao nível de significância de 5%.

Solução: $q_0 \simeq 4.4072 \not\in]5.991, +\infty[$ não devemos rejeitar H_0 ao n.s. de 5%

2. A fim de avaliar a influência do preço (x, em euro/kg) na quantidade de laranjas vendidas diariamente num supermercado (Y, em kg), admita que num conjunto de 12 dias foram observados no supermercado preços no intervalo $[0.50, 1.00]$ e apurados os seguintes valores:

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 8.4 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 6.105 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i = 1\,200 \qquad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 126\,300 \qquad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 804.5$$

Com base na informação apresentada:

(a) Calcule as estimativas de mínimos quadrados dos parâmetros da reta de regressão linear simples de Y em x e interprete o significado do sinal da estimativa do parâmetro β_1 do modelo. (2.0)

Solução: $\hat{\beta}_0 = 210.(4)$ e $\hat{\beta}_1 = -157.(7)$

(b) Após ter enunciado as hipóteses de trabalho que entender por convenientes, obtenha um intervalo de confiança a 95% para o valor esperado da quantidade (em kg) de laranjas vendidas num dia no supermercado ao preço de 0.65 euro/kg. (3.0)

Solução: Admite-se que $Y_i = Y|x = x_i \overset{i.i.d.}{\sim} \text{Normal}(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, 12$
$IC_{95\%}(\beta_0 + \beta_1 \times 0.65) = [102.16, 113.61]$

(c) Indique, sem efetuar quaisquer cálculos, se considera adequado seguir um procedimento análogo ao que usou na alínea anterior para obter um intervalo de confiança para o valor esperado da quantidade (em kg) de laranjas vendidas num dia no supermercado ao preço de 0.95 euro/kg. (1.0)

Solução: Sim, é possível proceder de forma análoga.