

# Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

## 10ª Aula Prática

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções:

- |                                  |   |                                     |
|----------------------------------|---|-------------------------------------|
| a) $2x^2 + 3x^3$ ,               | b) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ , | c) $\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}$ , |
| d) $\sqrt[3]{1-x}$ ,             | e) $\frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{x}$ ,             | f) $2x\sqrt[5]{x^2-1}$ ,            |
| g) $\frac{x^3}{3+x^4}$ ,         | h) $\frac{e^x}{1+2e^x}$ ,                               | i) $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ ,      |
| j) $\sin(2x)$ ,                  | k) $\frac{\sin(2x)}{1+\sin^2 x}$ ,                      | l) $\cos^2 x$ ,                     |
| m) $\frac{1}{\cos^2 x}$ ,        | n) $\frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ,         | o) $x \cos(x^2 + 2)$ ,              |
| p) $e^x \sin(e^x)$ ,             | q) $x^2 \sqrt[3]{1+x^3}$ ,                              | r) $\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ ,        |
| s) $\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$ , | t) $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ ,                          | u) $\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,     |
| v) $\frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ ,     | w) $\cos^3 x \sqrt{\sin x}$ ,                           | x) $\operatorname{tg}^2 x$ ,        |

2. (Exercício IV.22 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das funções:

- |                                    |  |  |
|------------------------------------|--|--|
| a) $(x^2 + 1)^3$ ,                 | b) $e^{x+3}$ ,                                       | c) $2^{x-1}$ ,                                     |
| d) $\frac{1}{\sqrt[5]{1-2x}}$ ,    | e) $\frac{x}{1+x^2}$ ,                               | f) $\frac{x^3}{x^8+1}$ ,                           |
| g) $\operatorname{cotg} x$         | h) $3^{\sin^2 x} \sin 2x$ ,                          | i) $\frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ , |
| j) $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ , | k) $\frac{x}{(1+x^2)^\alpha}$ ,                      | l) $\cos x \cos 2x$ ,                              |
| m) $\sin^3 x \cos^4 x$ ,           | n) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^4 x$ . |  |

3. Calcule uma primitiva de cada uma das funções:

- |  |  |  |
|--|--|--|
| a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$ ,    | b) $3 \operatorname{sen} x + 2x^2$ ,               | c) $\frac{x^2}{1+x^3}$ ,               |
| d) $xe^{-x^2}$ ,                         | e) $\frac{3 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$ , | f) $x\sqrt{1+x^2}$ ,                   |
| g) $e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x$ , | h) $\frac{1}{1+e^x}$ ,                             | i) $\operatorname{tg} x$ ,             |
| j) $\frac{1}{2+x^2}$ ,                   | k) $\operatorname{tg} x \sec^3 x$ ,                | l) $\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x$ , |
| m) $\frac{1}{(1+x^2) \arctan x}$ ,       | n) $\frac{x}{1+x^4}$ ,                             | o) $\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ ,         |
| p) $\frac{1}{1+3x^2}$ ,                  | q) $\frac{e^x}{e^{2x}+4}$ ,                        | r) $\sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}$ ,  |
| s) $\frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}$ ,           | t) $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ ,                        | u) $\frac{1}{(x+1)^2}$ ,               |
| v) $\frac{\cos(\log x)}{x}$ ,            | w) $\frac{1}{x \log x}$ ,                          | x) $\sec^4 x$ .                        |

4. (Exercício IV.23 de [1]) Determine as funções que verificam as condições impostas em cada uma das alíneas seguintes:

- a)  $f'(x) = \frac{1}{4+9x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $f(0) = 1$ .  
 b)  $g'(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $g(0) = 0$ ,  $g(2) = 3$ .  
 c)  $h'(x) = \sec^2 x$ , para  $x$  no domínio de  $\sec x$ ;  $h(k\pi) = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

5. (Exercício 5.5 de [2]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões

$$x \sin(x^2), \quad \frac{e^x}{2+e^x}, \quad \frac{1}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$$

determine se possível:

- a) uma primitiva que se anule no ponto  $x = 0$ ;  
 b) uma primitiva que tenda para 0 quando  $x \rightarrow +\infty$ .

6. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais (todas imediatamente primitiváveis):

- |                            |                           |                           |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| a) $\frac{1}{1-x}$ ,       | b) $\frac{1}{(x-3)^3}$ ,  | c) $\frac{x+1}{x^2+1}$ ,  |
| d) $\frac{x}{1+(x-1)^2}$ , | e) $\frac{2x+1}{x^2+4}$ , | f) $\frac{1}{x^2+2x+2}$ . |

7. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{1}{x^2 + x}, & \text{b)} \frac{x + 1}{x(x - 1)^2}, & \text{c)} \frac{x^2 + x - 4}{x(x^2 + 4)}, \\ \text{d)} \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 1)}, & \text{e)} \frac{x^5}{x^2 - 1}, & \text{f)} \frac{x}{(x + 1)(x + 2)^2}, \\ \text{g)} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x}{(x + 1)^2}, & \text{h)} \frac{x^4}{x^4 - 1}, & \text{i)} \frac{x^3 + 4x^2 - 4x}{x^4 - 16}. \end{array}$$

8. Determine *todas* as primitivas de cada uma das funções do exercício anterior (nos respectivos domínios).

9. (Exercício 5.16 de [2]) Determine

a) Uma expressão geral das primitivas da função definida em  $\mathbb{R}$  por

$$f(x) = (x + 1)e^{x^2+2x}.$$

b) A primitiva  $G$ , da função

$$g(x) = \frac{x + 3}{x^4 - x^2}$$

definida no intervalo  $]1, +\infty[$  e que verifica a condição  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 3$ .

10. (Exercício 5.3 de [2]) Determine uma função  $F$  definida em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  que obedece às seguintes condições:

$$F'(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad F(2) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 10.$$

11. (Exercício 5.12 de [2]) Determine a função  $\psi : ]-1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as condições

$$\forall_{x > -1} \psi''(x) = \frac{1}{1 + x}, \quad \psi(0) = \psi'(0) = 1.$$

*Outros exercícios:* 5.2, 5.4, 5.7, 5.14, 5.17, 5.20 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.