Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

11ª Aula Prática

1. (Exercício IV.25 de [1]) Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

   a) xe^x, b) $x \operatorname{arctg} x$, c) $\arcsin x$,
   d) $x \sin x$, e) $x^3 e^{x^2}$, f) $\log^3 x$,
   g) $x^n \log x,\ n \in \mathbb{N}$, h) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

2. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

   a) $e^x(e^x + x)$, b) $e^x \operatorname{sen} x$, c) $x^3 e^{-x^2}$,
   d) $\arctan x$, e) $\sqrt{x} \log x$ f) $x(1+x^2)\arctan x$,
   g) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^3}}$, h) $\log\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$, i) $x^2 \log^2 x$,
   j) $\log^2 x$, k) $\dfrac{1}{x^3}\cos\dfrac{1}{x}$, l) $\cos 2x \log(\operatorname{tg} x)$,
   m) $3x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$, n) $\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$, o) $\operatorname{ch} x \cos x$,
   p) $3^x \cos x$, q) $\cos(\log x)$, r) $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$.

3. a) Usando o método de primitivação por partes, mostre que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, tem-se:

   $$P\left(\frac{x^2}{(1+x^2)^k}\right) = \frac{1}{2(1-k)}\left(\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} - P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right)\right).$$

   b) Justifique que, para $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$,

   $$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^k}\right) = -\frac{1}{2(1-k)}\frac{x}{(1+x^2)^{k-1}} + \left(1 + \frac{1}{2(1-k)}\right)P\left(\frac{1}{(1+x^2)^{k-1}}\right).$$

   (Sugestão: $\frac{1}{(1+x^2)^k} = \frac{1}{(1+x^2)^{k-1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$).

   c) Utilize a alinea anterior para calcular

   $$P\left(\frac{1}{(1+x^2)^2}\right), \qquad P\left(\frac{1}{(1+x^2)^3}\right).$$

4. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$, c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$, e) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, f) $\dfrac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$,

g) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$, h) $\dfrac{\log x}{x(\log x-1)^2}$, i) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{x^2}}$,

5. (Exercícios 5.21, 5.23, 5.24, 5.26, 5.28, 5.31 de [2]) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, c) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$,

d) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$, e) $\dfrac{2\log x-1}{x\log x(\log x-1)^2}$, f) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x\cos x}$.

6. Determine, usando a substituição indicada, uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

a) $\sec x,\ t=\operatorname{sen} x$, b) $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$,

c) $\sqrt{1-x^2},\ x=\operatorname{sen} t$ d) $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x+\cos x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$,

e) $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^4},\ x=\cos t$, f) $\dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-e^x}},\ t=\sqrt{1-e^x}$,

g) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x},\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$, h) $\dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}},\ x=\operatorname{sen}^2 t$,

i) $\dfrac{3\operatorname{sen} x+3}{\cos x+\operatorname{sen} 2x},\ t=\operatorname{sen} x$, j) $\sec^3 x,\ t=\operatorname{sen} x$,

k) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x=\operatorname{tg} t$, l) $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos^2 x},\ t=\operatorname{sen} x$,

m) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ t=\sqrt{1-x^2}$, n) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}},\ t=\sqrt{1+e^x}$,

o) $\sqrt{4+x^2},\ x=2\operatorname{tg} t$, p) $\dfrac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}},\ x=\sec t$.

7. (Exercício 5.21 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b) $g'(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, $x>16$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)=1$.

8. (Exercício 5.24 de [2]) Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

    a) $f''(x) = (1 + \sin x) \cos x,\ f'(0) = 0,\ f(0) = 3.$

    b) $g'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}},\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 1.$

9. Determine, utilizando métodos de primitivação adequados, uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\|x\|$,	b) $x \arcsin \dfrac{1}{x}$,	c) $\operatorname{sen}(\log x + 1)$,
d) $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$,	e) $\sqrt{x} \arctan \sqrt{x}$,	f) $\dfrac{1 + \log^2 x}{x\,(1 + \log x)}$,
g) $\dfrac{e^{-x}}{e^{2x} - 2e^x + 2}$,	h) $\dfrac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}$,	i) $\cos^3 x$,
j) $\cos^4 x$,	k) $x \log \dfrac{1 - x}{1 + x}$,	l) $\dfrac{1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$,
m) $\dfrac{\log(\log x)}{x \log x}$,	n) $\log(x + \sqrt{x})$,	o) $\dfrac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$,
p) $\cos x \log(1 + \sin^2 x)$,	q) $\dfrac{\log(\log x)}{x}$,	r) $x \operatorname{arctg}^2 x$,
s) $\dfrac{\log(1 + x)}{\sqrt{1 + x}}$,	t) $\dfrac{1}{\sin x}$,	u) $\dfrac{x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$,
v) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + 3\cos^2 x}$,	w) $\log(\cos x) \operatorname{tg} x$,	x) $\dfrac{1}{(x + 1)\sqrt{x + 2}}$,
y) $(\operatorname{arcsen} x)^2$,	z) $\dfrac{1}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$.	

10. Determine uma função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique as condições seguintes:

$$\varphi''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} \varphi'(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Outros exercícios (resolvidos): 5.22, 5.25 , 5.32 de [2]

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.