Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

12ª Aula Prática

1. (Exercício VI.1 de [1]) Considere a função f definida no intervalo $[0,2]$ por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,1[\\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 3 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$$
   (a) Mostre que para toda a decomposição do intervalo $[0,2]$, as somas superior $S_d(f)$ e inferior $s_d(f)$ verificam $s_d(f) \leq 4 \leq S_d(f)$.
   (b) Recorrendo directamente à definição, mostre que f é integrável e que $\int_0^2 f(x)dx = 4$.

2. (a) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, mostre que f^2 é integrável. (Sugestão: Considere $f \geq 0$; o caso geral segue de $f^2 = |f|^2$).
   (b) Sendo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis, justifique que fg é integrável. (Sugestão: $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$.)

3. (Exercício VI.3 de [1]) Prove que, se f é contínua em $[a,b]$ e g é integrável e não negativa em $[a,b]$, existe $c \in]a,b[$ tal que
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

4. (Exercício VI.7 de [1]) Mostre que se f é contínua em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = 0$, existe pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$ no intervalo $[a,b]$.

5. (Exercício 6.10 de [2]) Sendo f uma função contínua em $\mathbb{R}$, prove que se é nulo o integral de f em qualquer intervalo limitado, então $f(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Dê um exemplo de uma função integrável e com integral nulo em qualquer intervalo limitado e que não verifique $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

6. (Exercício 6.13 de [2]) Calcule $\phi'(x)$ sendo $\phi(x) = \int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\, dt$.

7. Determine as derivadas das funções seguintes:
$$\text{a)} \int_1^x \sin(t^2)\, dt, \qquad \text{b)} \int_x^{2\pi} \cos(t^2)\, dt,$$
$$\text{c)} \int_x^{2x} e^{t^2}\, dt, \qquad \text{d)} \int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt, \qquad \text{e)} \int_{x^2}^{x^4} \sin(\sqrt{t})\, dt.$$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\psi(t) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$. Justifique que ψ é duas vezes diferenciável e calcule $\psi''(x)$.

9. (Exercício 6.9 de [2]) Mostre que se f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ verificando a condiçaõ

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

então f é uma função constante. (Sugestão: derive ambos os membros da igualdade anterior).

10. Mostre que a função seguinte não depende de x:

$$\psi(x) = \int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

11. (Exercício 6.16 de [2]) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4}.$$

12. Calcule os limites:

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} x \int_{\pi/2}^{\arctan x} \sin(t^2)\,dt, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3} (e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt}.$$

13. (Exercício 6.53 de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e tal que $f(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.
    (a) Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $F'(x)$.
    (b) Mostre que F é estritamente crescente e que, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $xF(x) > 0$.
    (c) Prove que se f tem limite positivo quando $x \to +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Mostre, por meio de exemplos, que se for $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ pode ser finito ou $+\infty$.

14. (Exercício 6.46.c) de [2]) Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{se } x \neq 0 \\ f(0) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Prove que F é contínua em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; mostre que, nas condições indicadas, F pode não ser diferenciável em 0.

15. (Exercício VI.15 de [1]) Sejam u e v funções contínuas em $\mathbb{R}$ e tais que, para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $u = v$ e $\int_a^b u(t)\,dt = 0$.

16. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções integráveis em qualquer intervalo limitado e a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} &\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ &\int_{-x}^{x} g(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Mostre que se f é par e g é ímpar então verificam (1).

b) Mostre que se f e g são contínuas e verificam (1) então f é par e g é ímpar.

c) Forneça exemplos de funções f e g que verificam (1) e que não sejam par nem ímpar, respectivamente.

Outros exercícios (resolvidos): 6.4, 6.6, 6.12, 6.17, 6.19, 6.20, 6.55 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.