Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

12 ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. (a) Seja $d = \{0 = t_0, ..., t_n = 2\}$ uma decomposição de $[0, 2]$. Podemos assumir que $1 \in d$ (caso contrário, toma-se $d' = d \cup \{1\}$, e tem-se $S_{d'}(f) \leq S_d(f)$, $s_{d'}(f) \geq s_d(f)$). Seja $1 = t_k$, para algum $k \in \{1, ..., n-1\}$. Tem-se então, escrevendo $M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x)$,

$$M_i = 1,\ 1 \leq i \leq k-1, \quad M_k = 2, \quad , M_i = 3,\ k+1 \leq i \leq n,$$

$$m_i = 0,\ 1 \leq i \leq k, \quad m_{k+1} = 2, \quad , m_i = 3,\ k+2 \leq i \leq n.$$

As somas superior e inferior ficam:

$$\begin{aligned} S_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_{k-1} - t_{k-2}) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_{k+1} - t_k + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_{k-1} - t_0) + 2(t_k - t_{k-1}) + 3(t_n - t_k) \\ &= t_{k-1} + 2(1 - t_{k-1}) + 3(2 - 1) = 5 - t_{k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_d(f) &= 1(t_1 - t_0 + ... + t_k - t_{k-1}) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_{k+2} - t_{k+1} + ... + t_n - t_{n-1}) \\ &= 1(t_k - t_0) + 2(t_{k+1} - t_k) + 3(t_n - t_{k+1}) \\ &= t_k + 2(t_{k+1} - 1) + 3(2 - t_{k+1}) = 5 - t_{k+1}. \end{aligned}$$

Como $1 = t_k \in [t_{k-1}, t_{k+1}]$, escrevendo $t_{k-1} = 1 - \epsilon_1$, $t_{k+1} = 1 + \epsilon_2$, com $1 > \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ arbitrários, temos

$$S_d(f) = 5 - t_{k-1} = 4 + \epsilon_1 \geq 4, \qquad s_d(f) = 5 - t_{k+1} = 4 - \epsilon_2 \leq 4.$$

(b) Na alínea anterior vimos que dados $1 > \epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ arbitrários, existe d tal que

$$S_d(f) = 4 + \epsilon_1, \qquad s_d(f) = 4 - \epsilon_2.$$

Conclui-se então que

$$\overline{\int_0^2} f = \inf\{S_d(f) \,:\, d \text{ decomposição de } [0,2]\} \leq \inf_{1 > \epsilon_1 > 0} (4 + \epsilon_1) = 4,$$

$$\underline{\int_0^2} f = \sup\{S_d(f) \,:\, d \text{ decomposição de } [0,2]\} \geq \sup_{1>\epsilon_2>0} (4-\epsilon_2) = 4.$$

Logo, temos $4 \leq \underline{\int_0^2} f \leq \overline{\int_0^2} f \leq 4$, ou seja, $\underline{\int_0^2} f = \overline{\int_0^2} f = 4$. Assim, f é integrável com $\int_0^2 f = 4$.

2. (a) Seja $f \geq 0$. Para cada decomposição $d = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$, tem-se neste caso

$$M_i(f^2) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = M_i(f)^2,$$

$$m_i(f^2) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f^2(x) = \left(\inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)\right)^2 = m_i(f)^2.$$

Temos então

$$\begin{aligned} S_d(f^2) - s_d(f^2) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f^2) - m_i(f^2))(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f)^2 - m_i(f)^2)(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(M_i(f) + m_i(f))(t_i - t_{i-1}) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) = 2M(S_d(f) - s_d(f)), \end{aligned}$$

onde $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Dado $\epsilon > 0$ aribtrário, como f é integrável, podemos escolher a decomposição d tal que $S_d(f) - s_d(f) < \frac{\epsilon}{2M}$, e portanto tal que

$$S_d(f^2) - s_d(f^2) < \epsilon.$$

Conclui-se que f^2 é integrável para $f \geq 0$ integrável.

Para f arbitrária, como f integrável $\Rightarrow |f|$ integrável e portanto, como vimos acima, $|f|^2 = f^2$ é integrável.

(b) De $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$, temos que fg é uma soma de funções integráveis, e portanto integrável.

3. Como f é contínua em $[a,b]$, pelo Teorema de Weierstrass será limitada em $[a,b]$, ou seja, existem m e M tais que $m \leq f(x) \leq M$ em $[a,b]$.

Pela monotonia do integral:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Por outro lado, se $g \geq 0$, temos $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Se $\int_a^b g(x)dx = 0$, o resultado é válido para qualquer $c \in]a,b[$; para $\int_a^b g(x)dx > 0$ temos:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Pelo Teorema do Valor Intermédio, de novo porque f é contínua, f assume em $]a,b[$ todos os valores entre m e M, logo existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c) \Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

4. Se, por contradição, $f(x) = 0$ não tivesse raizes, segue da continuidade de f e do Teorema do Valor Intermédio que f não muda de sinal em $[a,b]$. Mas se $f > 0$ em $[a,b]$, da monotonia do integral tem-se $\int_a^b f(x)dx > 0$, o que é impossível. Da mesma forma, não pode ser $f < 0$ em $[a,b]$. Conclui-se que $f(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz.

5. Se, por contradição, fosse $f(a) > 0$ para algum a, como f é contínua, seria $f(x) > 0$ em $]a-\epsilon, a+\epsilon[$, para algum $\epsilon > 0$. Da monotonia do integral, $\int_{]a-\epsilon,a+\epsilon[} f(t)\,dt > 0$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, também não pode ser $f(a) < 0$. Logo, $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

   Alternativamente, tem-se por hipótese $\int_0^x f(t)\,dt = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Derivando ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo), temos

   $$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

6. Como $e^{\operatorname{sen} t}$ é uma função contínua, do Teorema Fundamental do Cálculo,

$\int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ é diferenciável, logo $\phi(x) = x^2 \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt$ também será e

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \left(\int_x^3 x^2 e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' = \left(-x^2 \int_3^x e^{\operatorname{sen} t}\,dt\right)' \\ &= 2x \int_x^3 e^{\operatorname{sen} t}\,dt - x^2 e^{\operatorname{sen} x}.\end{aligned}$$

7. a) $\sin x^2$. b) $-\cos x^2$. c) $2e^{4x^2} - e^{x^2}$. d) $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$. e) $4x^3 \sin(x^2) - 2x \sin(|x|)$.

8. Como f é contínua e $t \mapsto x - t$ é contínua, $(x-t)f(t)$ é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ é diferenciável com

$$\psi'(x) = \left(x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt\right)' = \int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

De novo porque f é contínua e do Teorema Fundamental do Cálculo, ψ' é diferenciável, ou seja, ψ é duas vezes diferenciável, e

$$\psi''(x) = f(x).$$

9. Como f é diferenciável, e portanto contínua, podemos derivar ambos os membros (usando o Teorema Fundamental do Cálculo):

$$\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = (xf(x))' \Leftrightarrow f(x) = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow xf'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Conclui-se que $f'(x) = 0$, para $x \neq 0$, ou seja, f é constante em $]0, +\infty[$ e em $]-\infty, 0[$. Como é contínua, tem-se que f é constante em $\mathbb{R}$.

10.

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' &= \left(\int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt - \int_0^{-\cos x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \operatorname{sen} x \\ &= \frac{\cos x}{|\cos x|} - \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} = 0.\end{aligned}$$

11. Temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$ a que se pode aplicar a Regra de Cauchy. Do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen} t^3\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

12. a) O limite é uma indeterminação que pode ser levantada usando a regra de Cauchy. O cálculo da derivada da função que envolve um integral é consequência do teorema de derivação da função composta e do teorema fundamental do cálculo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{1/x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x)}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} -\frac{x^2}{1+x^2}\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}^2 x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi^2}{4}\right).\end{aligned}$$

b) Da mesma forma

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\int_0^{x^2} te^{\sqrt{t}}\,dt}{\int_0^{x^3}(e^{\sqrt[3]{t}}-1)\,dt} = \lim_{x\to0^+}\frac{2x\cdot x^2e^x}{3x^2(e^x-1)} = \lim_{x\to0^+}\frac{2x}{3(e^x-1)} = \frac{2}{3}.$$

13. (a) Directamente do Teorema Fundamental do Cálculo; $F'(x) = f(x)$.

(b) Como $F'(x) = f(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, F é estritamente crescente. Temos então $F(x) > F(0) = 0$, para $x > 0$, e $F(x) < F(0) = 0$, para $x < 0$, ou seja, $xF(x) > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(c) Seja $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}^+$ e $M \in \mathbb{R}$ tal que, para $x > M$, tem-se $f(x) > \frac{L}{2}$. Então, para $x > M$,

$$\begin{aligned}F(x) = \int_0^x f(t)\,dt &= \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt \\ &> \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}\int_M^x 1\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \frac{L}{2}(x-M).\end{aligned}$$

Como $\int_0^M f(t)\,dt$ é constante e $\lim_{x\to+\infty}\frac{L}{2}(x-M) = +\infty$, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

Considere:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \le 1. \end{cases}$$

Neste caso $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$. Se

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } |x| > 1 \\ 1 & \text{se } |x| \le 1 \end{cases}$$

temos $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2$.

14. F é contínua e diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ uma vez que é o produto de duas funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\frac{1}{x}$ e $\int_0^x f(t)\,dt$ (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = F(0)$$

uma vez que f é contínua em 0 (onde se usou a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo). Logo, F é contínua em 0. Em relação à diferenciabilidade:

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(t) - xf(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{2x}$$

onde se usou de novo a Regra de Cauchy e o Teorema Fundamental do Cálculo. O limite acima existe sse f é diferenciável em 0 (e neste caso teríamos $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$).

15. Da continuidade de u e v, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para derivar os seus integrais indefinidos e temos então

$$\int_a^x u(t)\,dt = \int_b^x v(t)\,dt \Rightarrow \left(\int_a^x u(t)\,dt\right)' = \left(\int_b^x v(t)\,dt\right)' \Leftrightarrow u(x) = v(x).$$

Por outro lado, fazendo $x = b$, tem-se

$$\int_a^b u(t)\,dt = \int_b^b v(t)\,dt = 0.$$