Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

13ª Aula Prática

1. Calcule

$$\text{a)} \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{b)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx \qquad \text{c)} \int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,dx \qquad \text{d)} \int_{-1}^{1} \operatorname{tg} x.$$

2. Calcule

$$\text{a)} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \log x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\arctan x\,dx,$$

$$\text{c)} \int_0^1 \log(1+\sqrt{x})\,dx, \qquad \text{d)} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}\,dx,$$

$$\text{e)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx, \qquad \text{f)} \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx.$$

3. (Exercícios 6.23, 6.24, 6.26, 6.32 de [2]) Calcule

$$\text{a)} \int_1^{\pi} x \operatorname{arctg} x\,dx, \qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx, \qquad \text{c)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\,dx,$$

$$\text{d)} \int_0^1 \frac{1}{x-3}\,dx, \qquad \text{e)} \int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\,dx, \qquad \text{f)} \int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt$$

4. (Exercício V.9 de [1]) Sendo $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} e^{\frac{t^2+1}{t}}\,dt$, $x > 0$, mostre que

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x).$$

5. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Define-se $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ através da expressão $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt$. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, e mostre que

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(xF(x) + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x > 0.$$

(**Sugestão:** considere a mudança de variável $tx = y$.)

6. Mostre que, para qualquer $x > 0$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{1/x}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

(**Sugestão:** use uma substituição de variável adequada.)

7. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Mostre que
$$\int_0^1 F(x)\,dx = F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.$$
(**Sugestão:** use integração por partes.)

8. (Exercício 6.45 de [2]) Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se periódica de período $T > 0$, sse $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x+T)$. Mostre que, se f é contínua e periódica de período $T > 0$, então

   (a) $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,dt$ é uma função constante em $\mathbb{R}$.

   (b) Sendo F uma primitiva de f, F será também periódica de período T sse $\int_0^T f(t)\,dt = 0$.

9. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

   a) $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$,

   b) $g(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\log t}\,dt$,

   c) $h(x) = \int_1^x (x-t)e^{t^2}\,dt$.

10. Considere a função
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

    a) Justifique integrabilidade da função f, em qualquer intervalo limitado de $\mathbb{R}$.

    b) Definindo $\Psi(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, justifique que se trata de uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, e calcule $\Psi'(x), x \in \mathbb{R}$.

11. Considere a função de variável real definida por $\psi(x) = \int_{x^2}^x \frac{|t|e^{-t^4}}{1+t^2}\,dt$.

    a) Calcule os zeros e o sinal de ψ;

    b) Mostre que $\psi(x) \leq \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} \log\left(\frac{1+t^2}{1+t^4}\right), \forall_{x\in\mathbb{R}}$.

12. (Exercício 6.49 de [2]) Supondo que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$ e $f'(x) < 0$, considere a função g definida em $\mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\,dt.$$

    (a) Determine os intervalos em que g é monótona, os seus pontos de máximo ou de mínimo e as raizes da equação $g(x) = 0$. Estude ainda o sentido da concavidade do gráfico de g.

(b) A função g é majorada? E minorada?

13. (Exercício 6.56 de [2]) Considere a função $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\, dt$.

    (a) Determine o seu domínio e mostre que f é par.

    (b) Mostre ainda que é diferenciável e calcule a sua derivada.

    (c) Mostre que existe $a > 0$ tal que f é monótona e limitada em $]0, a[$. Que pode concluir da existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$?

14. (Exercício 6.51 de [2]) Sendo $\phi(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$, se $x \neq 0$ e $\phi(0) = 0$, considere a função $g(x) = \int_0^x \phi(t)\, dt$.

    (a) Justifique que g é ímpar.

    (b) Determine $g'(x)$, para $x \neq 0$ e ainda $g'(0)$.

    (c) Indique as abcissas dos pontos onde o gráfico de g tem tangente horizontal. Justifique que g é estritamente crescente.

    (d) Justifique que g é limitada.

15. (Exercício V.14 de [1]) Considere a função $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t\, dt.$$

    a) Calcule $\phi(2)$.

    b) Mostre que ϕ é diferenciável e calcule $\phi'(x)$.

    c) Estude ϕ do ponto de vista do crescimento e mostre que há um só ponto $c > 0$ tal que $\phi(c) = 0$.

16. Calcule as áreas de cada uma das seguintes regiões do plano:

    a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq |x|\}$,

    b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq x,\ y \geq x^3,\ y \leq 4x\}$,

    c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \log x \wedge x \leq a\}$, $a > 1$.

17. (Exercício V.11 de [1]) Calcule a área limitada pelas linhas de equações:

    a) $y = 9 - x^2$ e $y = x^2$,

    b) $y^2 = 4(1 - x)$ e $y^2 = 2(2 - x)$,

    c) $x^2 y = 1$, $y = -27x$, e $x = -8y$,

    d) $y = \sqrt[3]{x}$ e $y = \sqrt{x}$,

    e) $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, e $y = x^2$,

    f) $y = e^x$, $y = 1 - x$, $x = 1$.

18. Calcule a área limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

19. (Exercício 6.61 de [2]) Calcule a área de região plana definida pelas condições $x^2 + y^2 \leq 4$ e $y \geq \sqrt{3}x^2$.

20. (Exercício 6.62 de [2]) Calcule a área de região do plano limitada prlo gráfico da função $y = \operatorname{arctg} x$ e pelas rectas de equação $x = 1$ e $y = 0$.

21. (Exercício 6.63 de [2]) Calcule a área de região plana consitituída pelos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfazem as condições seguintes:

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, \qquad y \geq \frac{\pi}{16}x^2, \qquad y \leq \operatorname{arctg} x.$$

22. (Exercício 6.70 de [2]) Calcule a área da região do plano limitada pelas curvas de equações

$$y = \log x, \qquad y = \log^2 x.$$

Outros exercícios (resolvidos): 6.35, 6.39, 6.48, 6.57, 6.60, 6.68, 6.71, 6.76, 6.79a) de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.