Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

13ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) $\log 2$. b) $\log(1/2)$. c) 0 d) 0.

2. a) $\log\sqrt{\dfrac{2}{e}}$. b) $\dfrac{\log 2}{4}$. c) $\dfrac{1}{2}$. d) $\operatorname{arctg}(3/4)$.

   e) $-\dfrac{3}{4}$ (subst. $t = \operatorname{tg} x$). f) $-\dfrac{\pi}{4}$ $\left(\text{note que } \dfrac{1}{x^2+4x+5} = \dfrac{1}{(x+2)^2+1}\right)$.

3. a)
$$\int_1^\pi x \operatorname{arctg} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^\pi - \int_1^\pi \frac{x^2}{2(1+x^2)}\, dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8}$$
$$-\frac{1}{2}\int_1^\pi 1 - \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi^2}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \operatorname{arctg} x\right]_1^\pi$$
$$= \frac{\pi^2+1}{2}\operatorname{arctg}\pi - \frac{3\pi}{4}.$$

   b)
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

   c)
$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3 x\, dx = \int_0^\pi (1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\pi$$
$$= -\cos\pi + \frac{1}{3}\cos^3\pi + \cos 0 - \frac{1}{3}\cos^3 0 = \frac{4}{3}.$$

   d)
$$\int_0^1 \frac{1}{x-3}\, dx = \left[\log|x-3|\right]_0^1 = \log 2 - \log 3 = \log\frac{2}{3}.$$

   e)
$$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx = \int_2^4 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \log|x-1|\right]_2^4 = \frac{56}{3} + 8 + \log 3.$$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^t+e^{2t}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{x+x^2}\,\frac{1}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx$, fazendo a mudança de variável $x = e^t \Leftrightarrow t = \log x$. Tem-se

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$$

(verifique) e portanto

$$\int_1^e \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx = -1-\frac{1}{e}+\log(1+e)+0+1-\log 2 = -\frac{1}{e}+\log\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

4. $F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}e^{\frac{t^2+1}{t}}\,dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)}dt$. Fazendo a mundança de variável $u = \frac{1}{t}$, tem-se

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t}e^{\left(t+\frac{1}{t}\right)}dt = \int_1^x ue^{\left(\frac{1}{u}+u\right)}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = -\int_1^x \frac{1}{u}e^{\frac{1}{u}+u}\,du = -F(x).$$

5. Considerando a mudança de variável sugerida

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}} f(tx)\,dt = \frac{1}{x}\int_1^{\frac{1}{x}} f(y)\,dy.$$

que se pode diferenciar usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta.

6. Use a mudança de variável $y = 1/x$.

7. Uma vez que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F'(x) = e^{-x^2}$, usando integração por partes temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(x)\,dx &= [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = F(1) + \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 \\ &= F(1) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}.\end{aligned}$$

8. a) Usando a continuidade da função integranda para justificar a diferenciabilidade de $G(x) = \int_x^{x+T} f(t)\,dt$ pode derivar-se o integral e usar a periodicidade da função para mostrar que o integral tem derivada nula, pelo que é constante. Com efeito:

$$G'(x) = \left(\int_x^{x+T} f(t)\,dt\right)' = f(x+T) - f(x) = 0$$

(Note-se que a justificação anterior não é possível se não se supuser que f é contínua. No entanto a conclusão continua a ser verdadeira! é necessário nesse caso usar mudança de variável e a aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração - verifique!).

b) Se F é uma primitiva de f e é periódica de período T, temos

$$\int_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0.$$

Reciprocamente, se $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ então da alíena anterior, temos

$$G(x) = G(0) = 0 \Leftrightarrow \int_x^{x+T} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(x+T) - F(x) = 0.$$

Logo F é periódica de período T.

9. a) Como a função integranda $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{t^2}$ é contínua o integral existe qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$. Como a função integranda é positiva e $x \mapsto x^2$ é estritamente crescente para $x > 0$ o integral é estritamente crescente para $x \geq 0$. Como a função é par é estritamente decrescente para $x \leq 0$. (Alternativamente, justifique os resultados de monotonia derivando o integral usando o teorema fundamental do cálculo e o teorema de derivação da função composta; obtém-se $f'(x) = 2xe^{x^4}$ e as mesmas conclusões seguem com facilidade.)

b) Como $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \ni t \mapsto \frac{1}{\log t}$ é ilimitada numa qualquer vizinhança direita de 1 o integral não está definido se $e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$. O integral está definido para $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ pois a função integranda é nesse caso contínua no intervalo fechado definido pelos extremos do intervalo de integração. Para $x > 0$:

$$g'(x) = e^x \frac{1}{\log e^x} = \frac{e^x}{x} > 0$$

pelo que a função g é estritamente crescente. Um zero óbvio de g corresponde aos extremos de integração serem iguais, isto é $x = \log 2$, sendo portanto $g(x) < 0$ se $x < \log 2$ e $g(x) > 0$ se $x > \log 2$.

c) Temos $h(x) = x \int_1^x e^{t^2}\,dt - \int_1^x te^{t^2}\,dt$. As funções integrandas $t \mapsto e^{t^2}$ e $t \mapsto te^{t^2}$ são contínuas logo podemos derivar h usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra de derivação do produto:

$$h'(x) = \int_1^x e^{t^2}\,dt + xe^{x^2} - xe^{x^2} = \int_1^x e^{t^2}\,dt.$$

Como $e^{t^2} > 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos $h'(x) > 0$ para $x > 1$ e $h'(x) < 0$ para $x < 1$, ou seja, h é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 1[$, tendo um mínimo no ponto 1.

10. a) Note-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = 1$$

pelo que a função integranda *não* é contínua. No entanto só difere em 0 da função contínua $\tilde{f}$ definida por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-e^x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Como alterar uma função num ponto não altera a sua integrabilidade nem o valor do seu integral, a integrabilidade de $\tilde{f}$ implica a integrabilidade de f em qualquer intervalo limitado sendo os integrais de $\tilde{f}$ e f iguais.

b)

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x f = \frac{d}{dx} \int_0^x \tilde{f} = \tilde{f}(x).$$

Note-se que a não continuidade de f não permite aplicar o teorema fundamental do cálculo para calcular a derivada do integral indefinido de f e tivemos que recorrer à igualdade com o integral de $\tilde{f}$.

11. a) Note-se que a função integranda é não negativa e contínua. Tal acarreta que o integral vai ser positivo se $x > x^2$ (isto é $x \in]0, 1[$), negativo se $x < x^2$ (isto é $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$), e nulo se $x = x^2$ (isto é $x \in \{0, 1\}$).

b) Da alínea anterior decorre que basta estimar o integral para $x \in]0, 1[$. Para tal note-se que se $x \in]0, 1[$ o intervalo de integração está contido no intervalo $[0, 1]$ e aí a função integranda pode ser majorada por $\frac{t}{1+t^2}$. O cálculo do integral desta última função entre x^2 e x conduz então à majoração pretendida.

12. (a) Uma vez que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, logo contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo e da derivada da função composta que g é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$g'(x) = f(x^2 - 4x + 3)(2x - 4).$$

Como $f < 0$ em $\mathbb{R}$, tem-se $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x < 4 \Leftrightarrow x < 2$. Logo, f é crescente para $x < 2$, decrescente para $x > 2$ e assim f terá um ponto de máximo em 2. Não tem mais pontos de extremo uma vez que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a derivada só se anula em 2.

Dado que $f < 0$, tem-se

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = 3,$$

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$$

e

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x > 3.$$

Para a concavidade:

$$g''(x) = f'(x^2 - 4x + 3)(2x - 4)^2 + 2f(x^2 - 4x + 3) < 0,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$, uma vez que f e f' são negativas. Conclui-se que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo.

(b) Há dois aspectos a verificar. Por um lado, g é majorada porque é contínua e tem um único ponto de máximo em 2, logo $g(x) \leq g(2)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Por outro lado, para qualquer $x > 3$ temos $x^2 - 4x + 3 > 0$. Segue da monotonia do integral e de f ser decrescente, uma vez que $f' < 0$, que $f(t) \leq f(0)$, para $0 < t < x^2 - 4x + 3$ e que

$$g(x) = \int_0^{x^2-4x+3} f(t)\, dt \leq \int_0^{x^2-4x+3} f(0)\, dt = f(0)(x^2 - 4x + 3).$$

Logo, como $f(0) < 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \leq \lim_{x\to+\infty} f(0)(x^2 - 4x + 3) = -\infty,$$

e g não é minorada.

13. (a) Como a função integranda $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e é contínua no seu domínio, será integrável em qualquer intervalo limitado que não contenha 0. Como x e $3x$ têm sempre o mesmo sinal, temos $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fazendo a mudança de variável $u = -t$ temos

$$f(-x) = \int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}\, dt = \int_x^{3x} \frac{\cos(-u)}{-u}(-1)\, du$$

$$= \int_x^{3x} \frac{\cos u}{u}\, du = f(x).$$

Logo f é par,

(b) f é diferenciável uma vez que $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ é contínua (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Temos

$$f'(x) = \left(\int_a^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_a^{x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right)' = 3\,\frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x}$$
$$= \frac{\cos 3x - \cos x}{x},$$

em que tomamos $a > 0$, para $x > 0$, e $a < 0$, para $x < 0$.

(c) Como cos é decrescente em $]0,\pi[$, temos que para $0 < 3x < \pi$, $\cos(3x) < \cos x$, logo $f'(x) = \frac{\cos 3x - \cos x}{x} < 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{3}$, ou seja f é monótona decrescente em $]0, \frac{\pi}{3}[$. Por outro lado, para $x > 0$,

$$\left|\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leq \int_x^{3x} \frac{|\cos t|}{|t|}\,dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = [\log t]_x^{3x} = \log 3.$$

Logo f é limitada em $]0, \frac{\pi}{3}[\subset]0, +\infty[$.
Conclui-se que existe $f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$. Como f é par, existe também $f(0^-) = f(0^+)$, logo existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

14. (a) $g(-x) = \int_0^{-x} \phi(t)\,dt = \int_0^{x} \phi(-u)(-1)\,du = -g(x)$, notando que ϕ é par.

(b) Para $x \neq 0$ temos do Teorema Fundamental do Cálculo

$$g'(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2.}$$

Em $x = 0$:

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \phi(t)\,dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

(Alternativamente, poderiamos considerar a função $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$, para $x \neq 0$ e $\tilde{\phi}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = \dfrac{1}{2}$, que é contínua em $\mathbb{R}$, e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo a $\tilde{\phi}$ em $\mathbb{R}$ - ver Ex. 10.)

(c) $g'(x) \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

(d) Como g é ímpar, é suficente considerar $x \geq 0$. Temos que g é limitada em qualquer intervalo $[0, a]$, $a > 0$, uma vez que é contínua (decorre da continuidade do integral indefinido de qualquer função integrável). Para $x \in [a, +\infty[$ podemos majorar $g(x)$ por

$$g(a) + \int_a^x \frac{2}{x^2} = g(a) - \frac{2}{x} + 2a \leq g(a) + 2a.$$

15. a) $$\phi(2) = \int_1^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} \log t \, dt = \left[-\frac{1}{2(1+t^2)} \log t \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2t(1+t^2)} \, dt$$

$$= -\frac{\log 2}{10} + \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{13}{20} \log 2 - \frac{1}{4} \log 5.$$

b) $\phi'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} \log x$, para $x > 0$.

c) Tem-se $\frac{x}{(1+x^2)^2} > 0$ para qualquer $x > 0$, logo $\phi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, ou seja, ϕ é crescente em $]1, +\infty[$ e decrescente em $]0, 1[$.
Tem-se $\phi(1) = 0$. Se existisse $c \neq 1$ tal que $\phi(c) = 0$, então, do Teorema de Rolle, existiria um zero de ϕ' entre 1 e c. Como $\phi'(x) \neq 0$ para $x \neq 1$, temos que 1 é o único 0 de ϕ.

16. a) $\frac{1}{3}$

b) $\int_0^1 (4x - x) \, dx + \int_1^2 (4x - x^3) \, dx = \frac{15}{4}$.

c) $a(\log a - 1) + 1$

17. a) $A = 2 \displaystyle\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (9 - x^2 - x^2) \, dx = 18\sqrt{2}$,

b) $$A = 2 \int_0^1 \left(\sqrt{2(2-x)} - \sqrt{4(1-x)} \right) dx + 2 \int_1^2 \sqrt{2(2-x} \, dx$$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{2(2-x)} \, dx - 2 \int_0^1 \sqrt{4(1-x)} \, dx = \frac{8}{3}$$

c) $A = \displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{-x}{8} \right) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-27x - \frac{-x}{8} \right) dx = \frac{15}{4}$,

d) $A = \displaystyle\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} \right) dx = \frac{1}{12}$,

e) $A = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) \, dx = \frac{7}{48}$,

f) $A = \displaystyle\int_0^1 e^x - (1-x) \, dx = e - \frac{3}{2}$.

18. De $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ temos $y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. A área fica (fazendo a substituição $x=2\operatorname{sen} t$):

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^2 \sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t+1)\,dt = 4\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

19. As duas curvas intersectam-se em $(-1,\sqrt{3})$ e $(-1,\sqrt{3})$(verifique). Temos

$$A=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{3}x^2\right)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\pi}{6}-\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

(Faça a substituição $x=2\operatorname{sen} t$ para primitivar $\sqrt{4-x^2}$).

20. $A=\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$ (verifique!)

21. $A=\displaystyle\int_0^1\left(\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{16}x^2\right)\,dx+\int_1^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{16}x^2\right)\,dx=-\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{3}.$

22. As curvas intersectam-se nos pontos $(1,0)$ e $(e,1)$, e para $x\in[1,e]$, $\log x\geq\log^2 x$. Temos

$$\begin{aligned} A=\int_1^e\left(\log x-\log^2 x\right)\,dx &= \left[x\left(\log x-\log^2 x\right)\right]_1^e-\int_1^e x\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\log x\right)dx \\ &= e(1-1)-1(0-0)-[x]_1^e+\int_1^e 2\log x\,dx \\ &= -e+1+[2x\log x]_1^e-\int_1^e 2\,dx=3-e. \end{aligned}$$