Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

2ª Aula Prática

1. Indique justificando quais das proposições seguintes são verdadeiras:

   a) $\{1\} \subset \{1, \{2, 3\}\}$

   b) $\{1\} \in \{1, \{2, 3\}\}$

   c) $2 \in \{1, \{2, 3\}\}$

   d) $1 \in \{\mathbb{R}\}$

   e) $\emptyset = \{x \in \mathbb{N} : x = x + 1\}$

   f) $\emptyset \in \{0\}$

   g) $\emptyset \subset \{0\}$

   h) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\, x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

   i) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\, x > 1 \Leftrightarrow x^{-1} < 1$

   j) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow y^{-1} < x^{-1}$

   k) $\forall_{x \neq 0}\, x^2 > 0$

   l) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y \Rightarrow x^2 < y^2$

   m) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\, x < y < 0 \Rightarrow x^2 > y^2$

2. Verifique que $\forall_{a>0}\, a + \frac{1}{a} \geq 1$. (Sugestão: considere separadamente $a \geq 1$ e $a < 1$.)

3. (Exercícios 1.17, 1.18 e 1.19 de [2]) Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \geq 1$

   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$

   d) $n! \geq 2^{n-1}$, para todo o natural $n \geq 1$

4. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   b) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

c) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

e) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

5. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   b) $2n - 3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$

   c) $7^n - 1$ é múltiplo[1] de 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$

   d) $2^{2n} + 2$ é múltiplo de 3 para qualquer $n \in \mathbb{N}$

6. (Exercício 1.20 de [2]) Demonstre a desigualdade de Bernoulli: Sendo $a > -1$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

7. Seja $P(n)$ a condição "$n^2 + 3n + 1$ é par".

   a) Mostre que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

   b) Pode concluir que $n^2 + 3n + 1$ é par, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

   c) Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 3n + 1$ é ímpar

8. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = (2n+2)(2n+1)f(n)$. Mostre por indução matemática que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) = (2n)!$$

9. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 3, \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

   Mostre usando indução matemática que $u_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

10. (Teste de 29-4-2006) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}. \end{cases}$$

   Mostre usando indução matemática que $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

---

[1] Um número é múltiplo de 6 sse é da forma $6k$, para algum $k \in \mathbb{N}_1$.

11. Verifique que se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então n^2 é também ímpar. O que pode concluir de $n \in \mathbb{N}$ sabendo que n^2 é par?

12. Verifique que se x, y são números racionais, então $x + y$, xy, $-x$, x^{-1} (para $x \neq 0$) são também números racionais.[2]

13. (Exercício I.3 de [1]) Verifique que, se x é um número racional diferente de zero e y um números irracional, $x+y$, $x-y$, xy e y/x são irracionais; mostre também que, sendo x e y irracionais, a sua soma, diferença, produto e quociente podem ser ou não ser irracionais.

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.

[2] Ou seja, $\mathbb{Q}$ é fechado para a adição e multiplicação e contem os simétricos e inversos de todos os seus elementos. Mostra-se assim, uma vez que também os elementos neutros 0 e 1 são racionais, que $\mathbb{Q}$ é um corpo. É fácil ver que também verifica as propriedades de ordem, ou seja, $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.