Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

3ª Aula Prática

1. (Exercício 1.2 de [2]) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2 \right\}, \qquad B = [-3, 4], \qquad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

   b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\inf(A \cap B \cap C)$, $\sup(A \cap B \cap C)$ e $\min(A \cap B \cap C)$.

2. (Exame de 19/1/2000) Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \frac{x-1}{x \log x} > 0 \right\}, B = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   Mostre que o conjunto A é igual a $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Determine, caso existam, ou justifique que não existem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo dos conjuntos A e $A \cup B$.

3. (Exercício 1.8 de [2]) Considere os conjuntos

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \frac{1}{\log x} \geq 1 \right\}, B = \left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   Para cada um dos conjuntos A e B, indique o conjunto dos majorantes, o conjunto dos minorantes e, no caso de existirem (em $\mathbb{R}$), o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo.

4. Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \, x^2 + 2|x| > 3\}, \qquad B = \left]0, \sqrt{2}\right[,$$

$$C = \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

   a) Calcule A sob a forma de uma reunião de intervalos.

   b) Indique, caso exista, $\inf A$, $\min A \cap B$, $\max A \cap B$, $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q}$, $\max C$, $\max B \setminus C$.

5. (Exame de 2000) Sejam A e B os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-1| \leq x^2 - 1\}, \qquad B = [-2, 2]\,.$$

   a) Determine A sob a forma de reunião de intervalos.

   b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$, o máximo e o mínimo de $A \cap B$ e o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $(A \cap B) \setminus \mathbb{Q}$.

6. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \,:\, |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\}, \qquad B = \mathbb{Q}, \qquad C = \left\{\frac{1}{k^2} \,:\, k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-1 + \sqrt{2},\, 3\right]$.

   b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de $A \cap B$, C.

7. (Exame de 16/1/2004) Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \left\{x \,:\, \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1|\right\}, \qquad B = \{x \,:\, \operatorname{sen} x = 0\}, \qquad C = \mathbb{Q}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\frac{1}{2},\, 0\right[\cup [1,\, +\infty[$.

   b) Escreva os conjuntos dos majorantes e minorantes de $A \cap C$ e $B \cap C$. Calcule ou conclua da não existência de $\sup A$, $\inf A \cap C$, $\min A \cap C$, $\min B$, $\sup B \cap C$.

8. (Teste de 12/11/2005) Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x \,:\, x \geq 0 \,\wedge\, \frac{x^4 - 4}{|x - 1|} \leq 0\right\}, \qquad B = \{x \,:\, x \geq 0 \,\wedge\, \exists_{k \in \mathbb{N}}\, kx \notin \mathbb{Q}\}\,.$$

   a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

   b) Determine, ou mostre que não existem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

9. (Teste de 29/4/2006) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{x : \frac{x^2 - 2}{|x| - 1} \leq 0\right\}, \quad B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}.$$

   a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\,\cup\, \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) Determine ou justifique que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos $A \cap \mathbb{Q}$, B e $B \cap \mathbb{Q}$.

10. (Exercício 1.10 de [2]) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$, majorado e não vazio, e seja m um majorante de A, distinto do supremo desse conjunto. Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

11. (Exercício I.5 de [1]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \subset B$ e suponha que A é não vazio e B é majorado. Justifique que existem os supremos de A e B e prove que se verifica $\sup A \leq \sup B$.

12. (Exercício 1.12 de [2]) Sendo U e V dois subconjuntos majorados e não vazios de $\mathbb{R}$, tais que $\sup U < \sup V$, justifique (de forma precisa e abreviada) as afirmações seguintes:

    a) Se $x \in U$, então $x < \sup V$.

    b) Existe pelo menos um $y \in V$ tal que $y > \sup U$.

13. (Exercício 1.14 de [2]) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{R}$.

    a) Prove que, se $\sup A < \inf B$, A e B são disjuntos.

    b) Mostre, por meio de exemplos, que se for $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, A e B podem ser ou não disjuntos.

Outros exercícios: 1.1, 1.3, 1.4, 1.5, 1.9, 1.11, 1.13, 1.16 de [2], Exercício I.4 de [1].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.