Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

3ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) $A =]-\infty, -\frac{4}{3}] \cup [4, +\infty[$, logo $A \cap B = [-3, -\frac{4}{3}] \cup \{4\}$.

   b) $\sup A$ não existe, porque A não é majorado;

   $\min(A \cap B) = -3$, $\max(A \cap B) = 4$;

   $\inf(A \cap B \cap C) = -3$, $\sup(A \cap B \cap C) = -\frac{4}{3}$, $\min(A \cap B \cap C)$ não existe, porque $-3 \notin A \cap B \cap C$.

2. $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$: $\sup A$, $\max A$ não existem, uma vez que A não é majorado; $\inf A = 0 \notin A$, logo $\min A$ não existe.

   $\sup A \cup B$ (e $\max A \cup B$) não existem, porque $A \cup B$ não é majorado; $\inf A \cup B = \min A \cup B = -1$.

3. $A =]1, e]$: Majorantes de A: $[e, +\infty[$, Minorantes de A: $]-\infty, 1]$, $\sup A = e = \max A$, $\inf A = 1$, $\min A$ não existe, porque $1 \notin A$.

   $B = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$: Majorantes de B: $[2, +\infty[$, Minorantes de B: $]-\infty, \frac{1}{2}]$, $\sup B = \max B = 2$, $\inf B = \min B = \frac{1}{2}$.

4. a) $x^2 + 2|x| > 3 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \ \vee \ |x| < -3 \Leftrightarrow x < -1 \ \vee \ x > 1$.

   Assim, $A =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

   b) $\inf A$ não existe, porque A não é minorado;

   $A \cap B = \left]1, \sqrt{2}\right[$: $\min A \cap B$, $\max A \cap B$ e $\max A \cap B \cap \mathbb{Q}$ não existem e $\inf A \cap B \cap \mathbb{Q} = 1$;

   $\max C$ não existe; $\max B \setminus C$ não existe.

5. a) $A =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.

   b) $A \cap B = \{-2\} \cup [1, 2]$: $\min A \cap B = -2$, $\max A \cap B = 2$.

   $A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) =]1, 2[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$: $\sup A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 2$, $\inf A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$, $\min A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e $\max A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não existem, porque $1, 2 \notin A \cap B \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

6. b) $A \cap B = \left[-1 + \sqrt{2}, 3\right] \cap \mathbb{Q}$: $\sup A \cap B = 3$, $\max A \cap B = 3$, uma vez que $3 \in A \cap B$, $\inf A \cap B = -1 + \sqrt{2}$, $\min A \cap B$ não existe, porque $-1 + \sqrt{2} \notin A \cap B$.

$C = \left\{\frac{1}{k^2} \ : \ k \in \mathbb{N}_1\right\}$: $\sup C = \max C = 1$ (porque $1 \in C$ e 1 é majorante), $\inf C = 0$, $\min C$ não existe porque $0 \notin C$.

7. b) $A \cap C = \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\cup [1, +\infty[\ \cap \mathbb{Q}$: Majorantes de $A \cap C$: $\emptyset$.
$B = \{x \ : \ \operatorname{sen} x = 0\} = \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$, logo $B \cap C = \{0\}$, uma vez que $k\pi \notin \mathbb{Q}$, para $k \neq 0$. Majorantes de $B \cap C = [0, +\infty[$.
$\sup A$ não existe, $\inf A \cap C = -1/2$, $\min A \cap C = -1/2$, $\min B$ não existe, porque B não é minorado, $\min B \cap C = 0$.

8. a) Começamos por notar que

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0 \ &\Leftrightarrow \ \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \ x^2 - 2 \leq 0 \ \wedge \ |x-1| \neq 0 \quad (\text{porque } x^2+2 > 0 \text{ e } |x-1| \geq 0) \\ &\Leftrightarrow \ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Então,

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \ \wedge \ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}\right\} = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $kx \notin \mathbb{Q}$ então $x \notin \mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx \in \mathbb{Q}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Portanto $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $1 \cdot x = x \notin \mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Notamos que $A \setminus B = \left(\left[0, \sqrt{2}\right[\setminus \{1\}\right) \cap \mathbb{Q}$. Então,

$$\begin{gathered} \sup A = \sup A \setminus B = \sqrt{2} = \max A, \\ \inf A = \inf A \setminus B = 0 = \min A = \min A \setminus B. \end{gathered}$$

$A \setminus B$ não tem máximo pois $\sup A \setminus B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

9. a)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-2}{|x|-1} \leq 0 \ &\Leftrightarrow \ (x^2 < 2 \wedge |x| > 1) \vee (x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1) \\ &\Leftrightarrow \ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \wedge (x < -1 \vee x > 1), \end{aligned}$$

uma vez que $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$, logo $x^2 \geq 2 \wedge |x| < 1$ é impossível. Assim, $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\ \cup \ \left]1, \sqrt{2}\right]$.

b) $A \cap \mathbb{Q} = \left(\left]-\sqrt{2}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{2}\right[\right) \cap \mathbb{Q}$. $\sup A \cap \mathbb{Q} = \sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem máximo, $\inf A \cap \mathbb{Q} = -\sqrt{2} \notin A \cap \mathbb{Q}$, logo $A \cap \mathbb{Q}$ não tem mínimo.

$B = \{2^{n/2} : n \in \mathbb{N}_1\}$. $\inf B = \min B = \sqrt{2}$, $\sup B$ e $\max B$ não existem, porque B não é majorado.

$B \cap \mathbb{Q}$: temos $2^{n/2} \in \mathbb{Q}$ sse n é par, ou seja, $B \cap \mathbb{Q} = \{2^n : n \in \mathbb{N}_1\}$. $\inf B \cap \mathbb{Q} = \min B \cap \mathbb{Q} = 2$, $\sup B \cap \mathbb{Q}$ e $\max B \cap \mathbb{Q}$ não existem, porque B não é majorado.

10. Se m é majorante de A e $m \neq \sup A$ então $m > \sup A$. Tem-se $x \leq \sup A < m$, para qualquer $x \in A$, logo, para $0 < \epsilon < m - \sup A$, $V_\epsilon(m) \cap A = \emptyset$.

11. Se B é majorado e $A \subset B$, então A é majorado e qualquer majorante de B é majorante de A (directamente da definição de majorante). Por outro lado $A \neq \emptyset \wedge A \subset B \Rightarrow B \neq \emptyset$. Logo como A e B são majorados e não-vazios, o axioma do supremo garante que $\sup A$ e $\sup B$ existem. Como $\sup B$ é majorante de B será também majorante de A, logo $\sup A \leq \sup B$.

12. a) $x \in U \Rightarrow x \leq \sup U < \sup V$.

    b) Se para qualquer $y \in V$, $y \leq \sup U$, então $\sup U$ é majorante de V e seria $\sup U \geq \sup V$.

13. b) $\sup A > \inf B \wedge \sup B > \inf A$, por exemplo: $A = [0, 1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2]$: $A \cap B \neq \emptyset$;

    $A = \{0, 1\}$, $B = \{\frac{1}{2}, 2\}$ (ou $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $B = [\frac{1}{2}, 2] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) : $A \cap B = \emptyset$.