Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec
2º Semestre de 2006/2007
4ª Aula Prática

1. (Exercício II.1 de [1], excepto a), g)) Indique quais são majoradas, minoradas, limitadas, de entre as sucessões definidas do modo seguinte:

   a) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

   b) $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$.

   c) $u_n = (-1)^n n^2$.

   d) $u_n = n^{(-1)^n}$.

   e) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

   f) $u_1 = -1$, $u_{n+1} = -2u_n$.

   g) $u_1 = 0$, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{3}$.

2. Para as sucessões consideradas no exercício anterior, indique se são monótonas (crescentes ou decrescentes).

3. Baseando-se directamente na definição de limite mostre que:

   a) $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$.

   b) $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

   c) A sucessão de termo geral $u_n = n^2$ é divergente.

4. (Exercício II.2 de [1]) A mesma questão que a anterior para:

   a) $\frac{2n-1}{n+1} \to 2$.

   b) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} \to 1$.

5. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\frac{(2n+1)^3+n}{n^3+1}$,

   b) $\frac{(2n+1)^3+n^2}{(n+1)^2(n+2)}$,

   c) $\frac{(n+1)^2+2n^4}{(n+1)^4+2n^2}$,

   d) $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n-1}}$,

e) $\frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)$,

f) $\frac{1}{n}\left(2n+\sqrt{n}\right)$,

g) $\frac{(-1)^n}{n!}$,

h) $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{4n^2+1}}$,

i) $\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+1}}$,

j) $\frac{n+1}{n!}$,

k) $\frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}}$,

l) $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$,

m) $\frac{\sqrt[n]{1000}+1000}{n}$,

n) $\frac{n^n}{n^n+1}$,

o) $\frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[3]{n}}$,

p) $\frac{4^n}{1+4^{n^2}}$,

q) $\frac{(a^n)^2}{a^{n^2}}$, com $a>1$.

6. (Exercício 1.36 de [2]) Indique justificando abreviadamente a resposta, o conjunto dos valores reais de a para os quais a sucessão de termo geral $x_n=\frac{a^n}{2^{1+2n}}$ é

   a) convergente;

   b) divergente, mas limitada.

7. Dê exemplos de sucessões tais que:

   a) (u_n) tem termos em $]-\infty,1[$ e é crescente.

   b) (u_n) não é monótona e é convergente.

   c) (u_n) é divergente e $(|u_n|)$ é convergente.

   d) (u_n) é limitada e divergente.

   e) (u_n) tem termos em $\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}_1\}$ e é divergente.

   f) (u_n) tem termos em $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e converge para um elemento de $\mathbb{Q}$.

8. Sejam A, B e C os subconjuntos de $\mathbb{R}$ considerados no Ex.4 - Aula 3:

$$A=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2+2|x|>3\}=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[,\qquad B=\left]0,\sqrt{2}\right[,$$

$$C = \left\{ \sqrt{2} - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Dê um exemplo ou justifique a não existência de

(i) uma sucessão de termos em A monótona e divergente;

(ii) uma sucessão de termos no conjunto B crescente e divergente;

(iii) uma sucessão de termos no conjunto B com limite em $\mathbb{R} \setminus B$;

(iv) uma sucesão de termos no conjunto $\mathbb{R} \setminus B$ com limite em B;

(v) uma sucessão de termos no conjunto $A \setminus B$ com limite em $A \cap B$;

(vi) uma sucessão de termo geral u_n no conjunto C tal que $\lim u_n < \sqrt{2}$.

9. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = r v_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que

   (i) (u_n) seja monótona crescente;

   (ii) (u_n) seja monótona decrescente;

   (iii) (v_n) seja monótona crescente;

   (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

10. (Teste de 12-11-2005) Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \end{cases} .$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

11. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{3} \end{cases} .$$

a) Mostre usando indução que $1 < u_n < 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

12. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente (sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$). Calcule $\lim u_n$.

13. (Exercício II.1g) de [1]) Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
(Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n+\sqrt{2+u_n}}$.)

c) Justifique que (u_n) é convergente.

d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

14. (Exercício 1.45 de [2]) Justifique que, se as condições

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

são verificadas qualquer que seja $n \in \mathbb{N}_1$, então u_n é convergente.

15. (Exercício 1.47 de [2]) Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.

Outros exercícios: 1.26, 1.29, 1.37, 1.44 de [2], II.5 a) – f) de [1].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.