Cálculo Diferencial e Integral I

Mestrado em Eng. Civil, Licenciaturas em
Eng. Território e Eng. Geológica e Mineira
1º Semestre de 2006/2007
4ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) Limitada. b) Limitada. c) Não majorada, não minorada. d) Minorada, não majorada. e) Limitada. f) Não majorada, não minorada. g) Limitada.

2. a) Decrescente. b) Não monótona. c) Não monótona. d) Não monótona. e) Crescente (estritamente). f) Não monótona. g) Crescente (estritamente).

3. b) Seja $\varepsilon > 0$. Como, para $\varepsilon < 1$,

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$$

escolhendo um $p \in \mathbb{N}_1$ tal que $p \geq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, tem-se, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$:

$$n > p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Se $\varepsilon \geq 1$, então necessariamente, $\frac{1}{n^2+1} < 1 < \varepsilon$ e, portanto esta implicação é sempre válida. Demonstrou-se assim que

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{p\in\mathbb{N}_1} \forall_{n\in\mathbb{N}_1} \quad n > p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

c) Para qualquer $a \in \mathbb{R}$, mostra-se que (u_n) não converge para a. Tome-se $\epsilon > 0$ com $a + \epsilon > 0$, então

$$n^2 > a + \epsilon \Leftrightarrow n > \sqrt{a+\epsilon}.$$

Para qualquer ordem $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ com $n > p$ e $n > \sqrt{a+\epsilon}$, e neste caso, temos

$$n > p \wedge n^2 > a + \epsilon \Rightarrow n > p \wedge n^2 \notin \,]a - \epsilon, a + \epsilon[.$$

Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer ordem $p \in \mathbb{N}$, podemos tomar $n > p$ com $n^2 \notin V_\epsilon(a)$, ou seja, u_n não converge para a.

4. a) Dado ϵ, tome-se $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \frac{3}{\epsilon} - 1$. Para $n > p$, tem-se $|\frac{2n-1}{n+1} - 2| < \epsilon$.

   b) Dado ϵ, tome-se $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \frac{1}{\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}}$. Para $n > p$, tem-se $\left|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1\right| < \epsilon$.

5. a) 8, b) 8, c) 2, d) 1, e) 0, f) 2, g) 0, h) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, i) 1, j) 0, k) 0, l) 3, m) 0, n) 1, o) 0, p) 0, i) $\frac{(a^n)^2}{a^{n^2}} = a^{-n^2+2n} \to 0$.

6. a) $-4 < a \leq 4$;

   b) $a = -4$.

7. (É óbvio que os exemplos dados abaixo não são únicos ...)

   a) $(u_n) = -\frac{1}{n}$;

   b) $(u_n) = \frac{(-1)^n}{n}$;

   c) $(u_n) = (-1)^n$;

   d) $(u_n) = 1 + (-1)^n$;

   e) $(u_n) = \frac{1}{(-1)^n+2}$;

   f) $(u_n) = \frac{\sqrt{2}}{n}$.

8. (i) A sucessão de termo geral $u_n = n + 1$.

   (ii) Não existe, porque qualquer sucessão de termo geral $u_n \in B$ satisfaz $0 < u_n < 1$, para $n = 1, 2, \ldots$, sendo portanto limitada, e toda a sucessão monótona e limitada é convergente.

   (iii) A sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$: para cada $n \in \mathbb{N}_1$, $u_n \in B$ e, no entanto, $u_n \to 0 \notin B$.

   (iv) Não existe. Para cada $a \in B$ existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a) \subset B$. Ora, em tal vizinhança não existem termos u_n e, portanto, não pode ocorrer $u_n \to a$.

   (v) Não existe. Se existisse, essa sucessão seria um exemplo de uma sucessão satisfazendo as condições de (iv), o que contradiria a conclusão anterior.

   (vi) A sucessão constante de termo geral $u_n = \sqrt{2} - 1$. De facto, para $n = 1, 2, \ldots$, $u_n \in C$ e $\lim u_n = \sqrt{2} - 1 < \sqrt{2}$.

9. Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, e (u_n), (v_n) sucessões tais que $u_1 = a$, $u_{n+1} = r + u_n$ e $v_1 = a$, $v_{n+1} = rv_n$.

a) Mostrar que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}_1$:
Vamos considerar só a progressão aritmética (u_n):
– $n = 1$: $u_1 = a = a + (1-1)r$.
– Hipótese de indução: $u_n = a + (n-1)r$, para certo $n \in \mathbb{N}_1$. Queremos ver que $u_{n+1} = a + nr$. Então, por hipótese,

$$u_{n+1} = r + u_n = r + a + (n-1)r = a + nr.$$

b) (i) (u_n) monótona crescente: em geral, $u_{n+1} - u_n = r$, logo (u_n) será monótona crescente sse $r \geq 0$, com a qualquer (se $r = 0$, (u_n) é a sucessão constante igual a a). Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3 + u_n$.

(ii) (u_n) monótona decrescente: $r \leq 0$, a qualquer. Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -3 + u_n$.

(iii) (v_n) monótona crescente: em geral, $v_{n+1} - v_n = ar^n - ar^{n-1} = ar^{n-1}(r-1)$. Logo, (v_n) será monótona crescente sse $a \geq 0 \land r \geq 1$ ou $a \leq 0 \land 0 \leq r \leq 1$ (se $r < 0$, r^{n-1} muda de sinal, e (v_n) não é monótona). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n$, $v_1 = -2$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$,

(iv) (v_n) não seja monótona: de (iii), (v_n) não é monótona sse $r < 0$ (a qualquer). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = -3v_n$.

c) (u_n) não é limitada: temos, por a), $u_n = a + (n-1)r$, logo dado $b \in \mathbb{R}$ qualquer, para $r > 0$,

$$u_n > b \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{r} + 1$$

e portanto (u_n) não é majorada. Se $r < 0$, (u_n) não será minorada. Quanto a (v_n), de a), $v_n = ar^{n-1}$, logo (v_n) será limitada/convergente sse r^{n-1} for limitada/convergente, ou seja, será limitada para $-1 \leq r \leq 1$, convergente para $-1 < r \leq 1$, a qualquer.

10. a) $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) é uma sucessão crescente:

Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n), e uma vez que sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), teremos (u_{n+1}) convergente com $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtém-se

$$\lim u_n - \frac{\lim u_n}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim u_n = 2.$$

12. Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluímos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluímos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$, $1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.

    Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluímos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

    Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

13. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}_1$:

    – $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.

    – Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}_1$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos

    $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2.$

b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

– $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.

– Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}_1$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queríamos mostrar.

c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \,\wedge\, l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

14. Como $u_n > 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$, para qualquer n, ou seja, (u_n) é (estritamente) decrescente. Por outro lado, (u_n) é minorada (uma vez que $u_n > 0$ para qualquer n). Logo é convergente.

15. De $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$, temos que $y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_n - 1 < x_n < y_n + 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < b + 1$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < y_n < b$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$. Logo (x_n) é limitada.

    Como é monótona, será convergente.

    De $x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$, e $\lim x_n + \frac{1}{n} = \lim x_n - \frac{1}{n} = \lim x_n$, conclui-se do critério das sucessões enquadradas, que (y_n) é convergente e $\lim y_n = \lim x_n$.