Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

5ª Aula Prática

1. (Exercício 1.34 de [2]) Das sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}, \quad w_n = u_n v_n$$

indique, justificando abreviadamente as respostas, quais as que são limitadas e as que são convergentes.

2. (Exercício 1.40 de [2]) Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

3. Calcule o limite (em $\mathbb{R}$) ou justifique a sua não existência para cada uma das sucessões de termo geral

   a) $\frac{1}{(-1)^n n^2+2}$

   b) $(1+(-1)^n)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

   c) $\frac{n(1+(-1)^n)}{2}$

   d) $\frac{2n^2+(-1)^n}{n^2-1}$

   e) $\frac{n+\cos(n)}{2n-1}$

   f) $\left(-1-\frac{1}{n}\right)^n$

4. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R}\setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.

5. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}, \end{cases}$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

6. Identifique os conjuntos dos sublimites em $\mathbb{R}$ (e em $\overline{\mathbb{R}}$) da sucessão:

(a) de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n} + 2\cos n\pi$,

(b) (u_n) tal que $u_n = 0$ se n é par, $u_n = n$ se n é ímpar.

(c) $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$

(d) $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Será possível o conjunto dos sublimites em $\mathbb{R}$ de uma sucessão (u_n) ser um conjunto singular e (u_n) ser divergente? Justifique. E se os sublimites e a convergência da sucessão forem considerados em $\overline{\mathbb{R}}$? (Sugestão: veja um dos casos acima).

7. (Teste 12/11/05) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |2x+1| < |x|\}, \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}_1 \right\},$$

$$C = [-1, +\infty[.$$

a) Mostre que $A = \left]-1, -\frac{1}{3}\right[$.

b) Indique (caso existam em $\mathbb{R}$), $\inf C$, $\min(C \setminus A)$, $\sup(A \setminus \mathbb{Q})$, $\max(A \cup B)$, $\inf B$, $\max(B \setminus \mathbb{Q})$.

c) Diga, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

(i) Toda a sucessão decrescente de termos em A é convergente.

(ii) Toda a sucessão decrescente de termos em A é convergente para um elemento de A.

(iii) Toda a sucessão estritamente crescente em C é divergente.

(iv) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em B é não-vazio.

(v) O conjunto dos sublimites de qualquer sucessão de termos em B está contido em $\{-1, 0\}$.

8. (Exame de 1/3/2001) Considere os conjuntos definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+1}{x-2} \geq x \right\}, \qquad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(2x^2 + x) \geq 0 \right\}.$$

a) Identifique o conjunto A, e mostre que $B =]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

b) Determine, se existirem em $\mathbb{R}$:

$$\min A, \quad \sup B \cap \mathbb{Q}, \quad \inf A \cap B, \quad \sup B \cap \mathbb{R}^- \setminus \mathbb{Q}, \quad \max A \cap \mathbb{Q}^-.$$

c) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão crescente em $A \cap B \cap \mathbb{R}^-$, então (x_n) é convergente.

d) Mostre que, se (x_n) é uma sucessão em $B \cap \mathbb{R}^+$, então a sucessão (y_n) dada por $y_n = (-1)^n x_n$ é divergente.

e) Dê um exemplo de uma sucessão (x_n) de irracionais em A que convirja para um elemento do complementar de A.

9. (Exame 19/1/2000) Sejam A e B os conjuntos considerados no Exercício 2, Aula 3, $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

   a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

   b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

   c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

10. (Exame de 30/11/2002) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ (Ex.6 - Aula 3):

$$A = \left\{x \,:\, |x^2 - 2| \leq 2x + 1\right\} = \left[-1 + \sqrt{2},\, 3\right], \quad C = \left\{\frac{1}{k^2} \,:\, k \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

   Indique, justificando, se cada uma das proposições seguintes é verdadeira ou falsa:

   (i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente.

   (ii) Existem sucessões (a_n) de termos em $\mathbb{R} \setminus A$ convergentes e tais que $a_{n+1} a_n < 0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   (iii) Seja (a_n) uma sucessão de termos em C. Então qualquer subsucessão de (a_n) é convergente.

11. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

   a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

   b) $\frac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

12. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\frac{n^n}{1000^n}$

b) $n^{n+1} - n^n$

c) $3^n - (2n)!$

d) $(n! - n^{1000})^n$

e) $\frac{(2n)!}{n!}$

f) $\sqrt[n]{\frac{n+2}{n+1}}$

g) $\frac{n^{1000}}{1.0001^n}$

h) $\sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}}$

i) $\sqrt[n]{3^n + 2}$

j) $\sqrt[n]{n!}$,

k) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$

l) $\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{2^n}$

m) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

13. (Exercício II.5 de [1]) Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\frac{2n+3}{3n-1}$,

b) $\frac{n^2-1}{n^4+3}$,

c) $\frac{2^n+1}{2^{n+1}-1}$,

d) $\frac{n^3+1}{n^2+2n-1}$,

e) $\frac{(-1)^n n^3+1}{n^2+2}$,

f) $\frac{n^p}{n!}$ $(p \in \mathbb{N}_1)$,

g) $\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$,

h) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n^3}$,

i) $\frac{3^n}{n^2}$,

j) $\sqrt[n]{\frac{n^2+n-1}{n+3}}$,

k) $\sqrt[n]{2^n + 1}$,

l) $\sqrt[n]{(n+1)! - n!}$,

m) $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}$,

n) $\left(1-\frac{1}{n!}\right)^{n!}$,

o) $\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$.

14. Decida sobre a existência dos seguintes limites em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$, calculando os seus valores nos casos de existência:

   a) $\lim \frac{n!}{n^{1000}}$,

   b) $\lim \frac{(2n)!+2}{(3n)!+3}$,

   c) $\lim \frac{(2n)!}{(2n)^n}$,

   d) $\lim \frac{(n!)^2}{(2n)!+2}$,

   e) $\lim \frac{2^n n!}{n^n}$,

   f) $\lim \frac{3^n n!}{n^n}$,

   g) $\lim n^{\frac{1}{n}}$,

   h) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$,

   i) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{n}$,

   j) $\lim \left(2-\frac{1}{n}\right)^{n}$,

   k) $\lim \left(\frac{n-1}{2n^2+1}\right)^{\frac{2}{n}}$,

   l) $\lim \frac{2^{(n^2)}}{15^n}$.

15. a) Mostre que:

      i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

      ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

   b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

<u>Outros exercícios</u>: 1.22, 1.23, 1.25, 1.27, 1.29, 1.32, 1.33, 1.42, 1.44, 1.46, 1.51, 1.52 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.