Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

6ª Aula Prática

1. Determine funções inversas das seguintes funções, especificando os respectivos domínios (e contradomínios):

   a) $f(x) = e^{x^2-2}$, $x > 0$,

   b) $f(x) = 2\operatorname{sen} x$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

   c) $f(x) = \cos(2x)$, $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

   d) $f(x) = \operatorname{tg}(x-1)$, $x \in]1-\frac{\pi}{2}, 1+\frac{\pi}{2}[$.

2. Identifique $\arccos 0$, $\arccos 1$, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

3. Exprima as soluções da equação $\operatorname{sen} x = a$ em termos de $\operatorname{arcsen} a$. Faça o mesmo para a equação $\cos x = a$ em termos de $\arccos a$ e para $\operatorname{tg} x = a$ em termos de $\operatorname{arctg} a$.

4. Deduza as seguintes identidades:

   a) $\cos(\arccos x) = x$,

   b) $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$,

   c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1-x^2}$,

   d) $\operatorname{sen}(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

   e) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcsen} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ para $x \neq \pm 1$,

   f) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, para $x \neq 0$.

5. Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função injectiva e $g : f(D) \to D$ a sua inversa (ou seja, $g(y) = x$ sse $y = f(x)$, para quaisquer $x \in D$, $y \in f(D)$). Mostre que

   a) Se f é crescente/decrescente, então g é crescente/decrescente.

   b) Se f é ímpar, então g é ímpar.

   c) arcsen, arctg são crescentes e ímpares, arcos é decrescente.

6. Determine o domínio das funções seguintes:

   a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$,

   b) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$,

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$,

d) $f(x) = \log(\log x)$,

e) $f(x) = \log(1 - x^{\frac{3}{2}})$,

f) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$,

g) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$,

h) $f(x) = \operatorname{arcsen}(e^x)$,

i) $f(x) = \log(1 - \operatorname{arcsen} x)$.

7. (Exercício 3.17 de [2]) Mostre que se (u_n) é uma sucessão monótona, $(\operatorname{arctg} u_n)$ é uma sucessão convergente.

8. Mostre, recorrendo à definição de continuidade, que as funções definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = |x|$ são contínuas em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

9. Seja (x_n) uma sucessão real, com $\lim x_n = 1$, $x_n > 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Calcule, se existir, $\lim f(x_n)$ nos casos seguintes:

   a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

   b) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

   c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, para $x \neq 1$.

10. (Exercício 3.5 de [2]) Seja $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$). Supondo que existe uma sucessão (x_n) de termos em $[a, b]$ tal que $\lim \phi(x_n) = 0$, prove que ϕ tem pelo menos um zero em $[a, b]$.

11. (Exercício 3.14 de [2]) Sendo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

    a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

    b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

12. (Exercício III.2 de [1]) Para cada uma das funções definidas pelas expressões seguintes, determine os pontos de continuidade e descontinuidade:

    a) $\frac{x+1}{x^3+x}$;

    b) $\frac{x+1}{x^4+3x^3+2x^2}$;

    c) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$;

    d) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$;

    e) $\cos\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

f) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$;

g) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$;

h) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$;

i) $\sqrt{-\operatorname{sen}^2 x}$;

13. (Exercício 3.15 de [2]) Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 1, em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{sen} x)$? Justifique.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

15. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet, é apenas contínua em $x = 0$.

16. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$,

c) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

17. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$,

c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$,

d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1-\cos\frac{1}{x})\right]$,

e) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$,

f) $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$,

g) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

18. (Exercício 3.20 de [2]) Calcule

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$,

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$.

Outros exercícios: 3.3, 3.8, 3.9, 3.10, 3.12, 3.13 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.