Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

7ª Aula Prática

1. (Exercício 3.18 de [2]) Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}_1$, a função f verifica a condição
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$
Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique as respostas.

2. (Exercício 3.26 de [2]) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por
$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}\, d(x),$$
onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet.

   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?

   b) Estude $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

   c) Em que pontos é f contínua?

3. (Exercício 3.27 de [2]) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq -1\,, \\ \operatorname{arcsen} x\,, & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

   a) Determine K.

   b) Estude f do ponto de vista da continuidade.

   c) Indique o contradomínio de f e se tem supremo, ínfimo, máximo, mínimo.

   d) Quais são os limites $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty}$, caso existam?

4. (Exercício 3.34 de [2]) Considere a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

   a) Mostre que φ é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) Calcule os limites laterais de φ no ponto 0, e indique, justificando, se φ é contínua, contínua à direita ou contínua à esquerda nesse ponto (por definição, uma função é contínua à esquerda (direita) num ponto a do seu domínio D sse a sua restrição a $]-\infty, a] \cap D$ ($[a, +\infty[\cap D$) é contínua em a).

c) Calcule $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)$.

d) Indique, justificando, o contradomínio de φ.

5. (Exercício 3.29 de [2])

a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ou descontínua no ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

6. (Exercício 3.32 de [2]) Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}.$$

a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to1^+} f(x).$$

c) Justificando a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

7. (Exercício 3.33 de [2]) Considere as funções f e g definidas em $]0,+\infty[$ pelas expressões

$$f(x) = \log\log(1+x) \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}$$

a) Estude f e g quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Indique, justificando, se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Indique, justificando, o contradomínio de f.

8. (Exercício 3.36 de [2]) Seja f, a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \log\frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

9. (Exercício 3.40 de [2])

a) Sendo $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ contínua no seu domínio, mostre que a função

$$\varphi(x) = g(1 - x^2)$$

tem máximo e mínimo.

b) Se na alínea a) considerássemos g definida e contínua em $]0, +\infty[$ poderíamos continuar a garantir para φ a existíncia de máximo e mínimo? Justifique.

10. (Exercício 3.43 de [2]) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$ tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty.$$

Mostre que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2],\ x \in]a, b[$$

e determine o seu contradomínio. Justifique a resposta.

11. (Exercício III.11 de [1]) Mostre que a equação $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0, \pi[$.

12. (Exercício III.15 de [1]) Considere uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, e suponha que existem e são finitos os limites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

a) Prove que f é limitada.

b) Supondo que o produto dos dois limites indicados é negativo, indique justificando, o máximo da função

$$g(x) = \frac{1}{1 + [f(x)]^2}.$$

13. (Exercício IV.1 de [1]) Calcule as derivadas das funções:

a) $\operatorname{tg} x - x$,

b) $\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$,

c) $e^{\operatorname{arctg} x}$,

d) $e^{\log^2 x}$,

e) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x$,

f) $x^2(1 + \log x)$,

g) $\cos(\operatorname{arcsen} x)$,

h) $(\log x)^x$,

i) $x^{\operatorname{sen} 2x}$,

j) $\sqrt{1 - x^2}$,

k) $\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$.

14. Derive:

a) $\operatorname{arctg} x^4 - (\operatorname{arctg} x)^4$,

b) $(\operatorname{sen} x)^x$,

c) $\log \log x$,

d) $\frac{\operatorname{sen} \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$,

e) $(\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}$.

15. (Exercício IV.3 de [1]) para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

a) $x|x|$,

b) $e^{-|x|}$,

c) $\log |x|$,

d) $e^{x-|x|}$.

<u>Outros exercícios</u>: 3.19, 3.21, 3.22, 3.23, 3.28, 3.34, 3.37, 3.38, 3.42 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.