Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

7ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$, temos
$$\lim f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0^-), \quad \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0^+).$$
Então,
$$f\left(-\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow f(0^-) + f(0^+) = 1.$$
Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, temos $f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0^-) + f(0^+) = 1$, temos $2\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}\, d(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \vee x < 0\,, \\ x\,, & \text{se } x > 0 \wedge \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$
   a) Para $x \leq 0$, temos $f(x) = 0$, logo $f(]-\infty, 0]) = \{0\}$. Para $x > 0$ temos $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Logo $f(]0, +\infty[= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : x > 0\} = \{0\} \cup \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$. Assim, $f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$.
   A função não é majorada, uma vez que $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{Q}$ não é majorado, é minorada por 0.
   b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$;
   $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ não existe: se $x_n = n$ então $f(x_n) = 0$, se $y_n = \sqrt{2}n$ então $f(y_n) = \sqrt{2}n \to +\infty$.
   c) f contínua para $x \leq 0$ (ver Ex.5).

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua no ponto 1, dada por
$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \leq -1\,, \\ \operatorname{arcsen} x\,, & \text{se } -1 < x < 1\,, \\ K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$
   a) Como f é contínua em 1, temos $f(1) = f(1^+) = f(1^-)$. Temos $f(1) = K$ e
$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}.$$
   Logo $K = \frac{\pi}{2}$.

b) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (justificar!)

c) A partir dos contradomínios de arcsen e sen temos

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f(]-\infty,-1]) \cup f(]-1,1[) \cup f([1,+\infty[) \\ &= \{0\} \cup \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty}$, não existe (justificar!).

4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 + e^{1-x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Para $a > 0$: φ é contínua em a uma vez que numa vizinhança de a é dada pela função $1 + e^{1-x}$, que é contínua por ser dada pela composição de funções contínuas. Para $a < 0$: φ é contínua em a uma vez que numa vizinhança de a é dada pela função $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, que é contínua (em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) por ser dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios.

b) $\varphi(0^+) = \lim_{x\to0^+} 1 + e^{1-x} = 1 + e$
$\varphi(0^-) = \lim_{x\to0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.
Como $\varphi(0^+) \neq \varphi(0^-)$, φ não é contínua em 0. Mas $\varphi(0^+) = \varphi(0)$, logo φ é contínua à direita em 0.

c) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{1-x} = 1$,
$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0$.

d) $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]\infty, 0[) \cup \varphi([0,+\infty[) = \left]0, -\frac{\pi}{2}\right[\cup]1, 1+e]$ (justifique!).

5. a) – φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

– ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to0} \varphi(x)$, e $\lim_{x\to0} \psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x\to0} \varphi(x) = \lim_{x\to0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

– $\lim_{x\to0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$, uma vez que para qualquer sucessão (x_n) com $x_n \to 0$, temos

$$\lim x_n \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = 0$$

por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada. Por outro lado,
– $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ não existe, uma vez que para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tem-se $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e $\lim\cos\frac{1}{x_n} = \lim\cos(2n\pi) = 1$ e $\lim\cos\frac{1}{y_n} = \lim\cos((2n+1)\pi) = -1$.

Logo $\lim_{x\to 0}\psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) – $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.
– Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$. Quanto a $x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\mathrm{sen}\,y}{y} = 1$$

e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a, +\infty[$ e em $]-\infty, -a]$. Para $x \in [-a, a]$, temos

$$\left|x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right| \le a.$$

Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a, a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)

6. a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \wedge x - 1 \ne 0\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$$

c) $f(D) = f([0, 1[) \cup f(]1, +\infty[)$.
– $f([0, 1[)$: se $x \in [0, 1[$, então $x - 1 < 0$ e assim $f(x) \le 0$, ou seja $f([0, 1[) \subset]-\infty, 0]$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty, 0] \subset f([0, 1[)$. Logo, $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.
– $f(]1, +\infty[)$: se $x \in]1, +\infty[$, então $f(x) > 0$, ou seja $f(]1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$. Como f é contínua em $]1, +\infty[$, e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0,+\infty[\subset f(]1,+\infty[)$. Logo, $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d) – (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.

– (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

7. a) f e g são contínuas no seu domínio, $]0,+\infty[$, por serem dadas pela composição e produto de funções contínuas nos seus domínios.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, logo f não é prolongável por continuidade a 0; $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, logo g é prolongável por continuidade a 0.

d) Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, temos do Teorema do Valor Intermédio, que $f(D) = \mathbb{R}$.

(Alternativamente, $x \in]0,+\infty[\Leftrightarrow 1 + x \in]1,+\infty[$ e $\log(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$. Logo, $f(D) = \log(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$.)

8. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

b) Em $a > 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\log \frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

Em $a < 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log \frac{1}{1+x^2} = \log(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}\,, & \text{se } x < 0\,, \\ 0\,, & \text{se } x = 0\,, \\ \log \frac{1}{1+x^2}\,, & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$, com $\epsilon > 0$.

Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\epsilon, 0[$ que $g(x) \leq g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\log \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \epsilon]$, $g(x) \leq g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\max_{x \in [-\epsilon, \epsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

9. a) A função φ é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \in [0, +\infty[\}$, uma vez que é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios. Temos

$$1 - x^2 \in [0, +\infty[\Leftrightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-1, 1],$$

ou seja, $D = [-1, 1]$. Como D é um intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass garante que ϕ tem máximo e mínimo em D.

b) Não. Neste caso, o domínio de φ seria $]-1, 1[$. Tomando uma função g ilimitada numa vizinhança de 0, teríamos que φ seria ilimitada em vizinhanças de -1 e 1. Por exemplo, se $g(x) = \log(x)$, então $\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \to -1^+} \varphi(x) = -\infty$.

10. Seja $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to a} g(x) = -\lim_{x \to b} g(x) = -\infty.$$

Queremos ver que existe uma e uma só função contínua h definida em $[a, b]$ tal que

$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2], \ x \in]a, b[.$$

Então, para $x \in]a, b[$, a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$. Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x \to a^+} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x \to b^-} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a, b[$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a, b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0, +\infty[$ e portanto

$$h(]a, b[) = \operatorname{arctg}([0, +\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $h([a, b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

11. Para $x=0$, temos $\operatorname{sen}^3 0+\cos^3 0=1$ e para $x=\pi$, $\operatorname{sen}^3\pi+\cos^3\pi=-1$. Se $f(x)=\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x$, então f é contínua porque é dada pela soma e produto de funções contínuas e $f(0)=1>0$, $f(\pi)=-1<0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermédio, existe $x\in]0,\pi[$ tal que $f(x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x=0$.

12. Seja f contínua em $\mathbb{R}$ tal que existem e são finitos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

    a) Como existe (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, temos que f é limitada numa vizinhança de $+\infty$, ou seja num intervalo $[b,+\infty[$, para algum $b\in\mathbb{R}$. Da mesma forma, f será limitada num intervalo $]-\infty,a]$ para algum $a\in\mathbb{R}$.

       Por outro lado, por ser contínua, o Teorema de Weierstrass garante que f é limitada em $[a,b]$. Logo é limitada em $\mathbb{R}$.

    b) Para $g(x)=\frac{1}{1+[f(x)]^2}$, temos $g(x)\le 1$ e $g(x)=1 \Leftrightarrow f(x)=0$. Agora, se o produto dos dois limites indicados é negativo, ou seja, se os limites indicados têm sinais diferentes, então existe um ponto c tal que $f(c)=0$: existem $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(a)>0$ e $f(b)<0$, logo como f é contínua o Teorema do Valor Intermédio garante que existe c tal que $f(c)=0$. Temos neste caso $g(c)=1=\max g(x)$.

13. a) $(\operatorname{tg} x-x)'=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\operatorname{tg}^2 x$,

    b) $\left(\frac{x+\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right)'=1+\frac{\cos x(x+\cos x)}{(1-\operatorname{sen} x)^2}$,

    c) $(e^{\operatorname{arctg} x})'=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$,

    d) $\left(e^{\log^2 x}\right)'=\frac{2\log x}{x}\,e^{\log^2 x}$, para $x>0$,

    e) $(\operatorname{sen} x\cdot\cos x\cdot\operatorname{tg} x)'=(\operatorname{sen}^2 x)'=2\operatorname{sen} x\cos x=\operatorname{sen} 2x$, para $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$,

    f) $(x^2(1+\log x))'=3x+2x\log x$,

    g) $(\cos\operatorname{arcsen} x)'=\frac{-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

    h) $((\log x)^x)'=\left(e^{\log((\log x)^x)}\right)'=\left(e^{x\log(\log x)}\right)'=(\log x)^x\left(\log(\log x)+\frac{1}{\log x}\right)$,

    i) $(x^{\operatorname{sen} 2x})'=\left(e^{\operatorname{sen} 2x\log x}\right)'=x^{\operatorname{sen} 2x}\left(2\cos 2x\log x+\frac{sen 2x}{x}\right)$,

    j) $\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

    k) $\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)'=\frac{e^x}{2(1-e^x)^{\frac{3}{2}}}$.

14. a) $(\operatorname{arctg} x^4-(\operatorname{arctg} x)^4)'=\frac{4x^3}{1+x^8}-\frac{4\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}$.

    b) $((\operatorname{sen} x)^x)'=(e^{x\log\operatorname{sen} x})'=(\log\operatorname{sen} x+\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x})e^{x\log\operatorname{sen} x}$
    $=(\log\operatorname{sen} x+\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x})(\operatorname{sen} x)^x$.

    c) $(\log\log x)'=\frac{1}{x\log x}$.

d) $\left(\frac{\operatorname{sen}\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\cos(\operatorname{sen} x)\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

e) $((\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x})' = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x}\left(\frac{\log \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)}\right)$.

15. a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f'_d(0) = 1$ e $f'_e(0) = -1$ (justifique!), logo f não é diferenciável em 0.

c) $f(x) = \log|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, por ser dada pela composição de log, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(0) = 2$ (justifique!), logo f não é diferenciável em 0.