Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

8ª Aula Prática

1. (Exercício 4.9 de [2]) Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e calcule a derivada das seguintes funções:

   a) $\log(x \operatorname{sh} x)$ (ver Ex. 11),

   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$,

   c) $\frac{e^x}{1+x}$.

2. Calcule, se existirem, as derivadas laterais no ponto 0 da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

3. (Exercício 4.2 de [2]) Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

4. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}/\{0\}$, calcule f' para $x \neq 0$ e mostre que $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

   b) Justifique que f é diferenciável no ponto 0 e calcule $f'(0)$.

5. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável. Calcule $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

7. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\log x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

8. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'

9. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função vezes diferenciável e estritamente monótona, com $g(0) = 2$ e $g'(0) = \frac{1}{2}$. Considere $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(\operatorname{arcsen} x)$.

   a) Justifique que f é diferenciável em $]-1, 1[$ e calcule $f'(0)$.

   b) Justifique que f é injectiva e, sendo f^{-1} a sua inversa, calcule $(f^{-1})'(2)$.

10. (Exame de 14-6-06) Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ uma função vezes diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por
$$g(x) = \arccos(f(x)).$$

   a) Justifique que g é injectiva e diferenciável e, sendo sendo g^{-1} a função inversa de g determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'(\frac{\pi}{2})$.

   b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não tem máximo nem mínimo. Será g^{-1} limitada ?

11. As funções seno hiperbólico e coseno hiperbólico definem-se da forma
$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   a) Deduza as igualdades (comparando-as com as correspondentes para funções trigonométricas):

      i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$

      ii) $\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$

      iii) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$

      iv) $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$

      v) $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$

   b) Verifique que a função sh é ímpar, e a função ch é par.

   c) Calcule $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x, \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x$.

   d) Estude $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ quanto à continuidade e diferenciabilidade. Calcule $(\operatorname{sh} x)'$ e $(\operatorname{ch} x)'$.

   e) Estude $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ quanto à intervalos de monotonia e extremos e esboçe os respectivos gráficos.

f) As funções inversas das funções hiperbólicas $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ designam-se, respectivamente por argsh e argch, isto é, $x = \operatorname{sh} y$ sse $y = \operatorname{argsh} x$, $y \in \mathbb{R}$, e $x = \operatorname{ch} y$ sse $y = \operatorname{argch} x$, $y \in \mathbb{R}^+$. Deduza

$$\operatorname{argsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad \operatorname{argch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$$

Calcule $(\operatorname{argsh} x)'$ e $(\operatorname{argch} x)'$.

12. (Exercício 4.27 de [2]) Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_1.$$

Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

a) Para qualquer $n \geq 2$, a função f tem necessariamente máximo no intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

b) A função f é necessariamente limitada.

c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

13. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

14. Prove que a equação $3x^2 - e^x = 0$ tem exactamente três zeros.

<u>Outros exercícios</u>: 4.5, 4.6, 4.10, 4.11, 4.12, 4.17 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.