Cálculo Diferencial e Integral I

, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

8ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. a) $\log(x \operatorname{sh} x)$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(\log(x \operatorname{sh} x))' = \frac{\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x}{x \operatorname{sh} x}$.

   b) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x)$: domínio $[-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1]$, domínio de diferenciabilidade $]-\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 1[$, $(\operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-\operatorname{arctg}^2 x}}$.

   c) $\frac{e^x}{1+x}$: domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, domínio de diferenciabilidade $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $(\frac{e^x}{1+x})' = \frac{xe^x}{(1+x)^2}$.

2. $f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0$;

   $f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1$.

   (Nota: Logo f é contínua mas não diferenciável em 0.)

3. Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

   logo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

   e portanto $f(0) = 0$. (Também podíamos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 0\cdot\frac{1}{1} = 0.)$$

   Agora,

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 1,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

   (Nota: De novo, f é contínua mas não diferenciável em 0.)

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   a) Para $x \neq 0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis: x^2 que é uma função polinomial, e $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ que é a composta de uma função trigonométrica, diferenciável em $\mathbb{R}$ com $\frac{1}{x}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos para $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

   Não existe $\lim_{x\to 0} f'(x)$ porque não existe $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (e uma vez que $\lim_{x\to 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ (justifique!)

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.
   Logo f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$.

5. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x) \cos x + \cos(f(x)) f'(x).$$

   Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0) \cos 0 + \cos(f(0)) f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen} \pi) \cos \pi + \cos(f(\pi)) f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi).$$

6. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e arctg também,

$$(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{1 + f^2(x)} f'(x) + f'(\operatorname{arctg} x) \frac{1}{1 + x^2}.$$

7. Do teorema de derivação da função composta, para $x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\log x)} \left(g(\log x)\right)' = e^{g(\log x)} g'(\log x) \frac{1}{x}.$$

   Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)} g'(0).$$

   Derivando φ', temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\log x)} \frac{1}{x^2} \left(\left(g'(\log x)\right)^2 - g'(\log x) + g''(\log x) \right).$$

8. $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x) = g'(x^4 e^{-x})(4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) =$
   $g'(x^4 e^{-x}) x^3 e^{-x} (4 - x)$.

9. a) arcsen é diferenciável em $]-1,1[$ e g é diferenciável em $\mathbb{R}$, logo em $]-1,1[$, f é dada pela composição de funções diferenciáveis e é assim diferenciável. Temos

$$f'(x) = g'(\operatorname{arcsen} x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = g'(0)\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

b) Como g é estritamente monótona e arcsen é injectiva, temos que f também será injectiva. Pelo Teorema de derivação da função inversa,

$$\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)},$$

se $f'\left(f^{-1}(2)\right) \neq 0$. Como $f(0) = g(0) = 2$, temos $f^{-1}(2) = 0$, e $f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0$, logo $\left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

10. a) Uma vez que arcos é diferenciável em $]-1,1[$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}$ com contradomínio $]-1,1[$, a função composta será também diferenciável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, f é bijectiva, logo injectiva, e arcos é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.

Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$$

logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2$.

Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Como $g(2) = \operatorname{arcos}(f(2)) = \operatorname{arcos}(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

b) O domínio de g^{-1} é dado pelo contradomínio de g. Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \operatorname{arcos}(]-1,1[) =]0,\pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g, ou seja, $\mathbb{R}$, e assim g^{-1} não é limitada.

11. a) i) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})}{4} = 1$;

iv) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = 2\,\frac{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{4} = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \operatorname{sh} 2x$;

v) De i) e iv), temos $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}$. Logo, $\operatorname{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.

b) Resulta directamente da definição.

c) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$.

d) $\operatorname{sh} x$ e $\operatorname{ch} x$ são contínuas e diferenciáveis no seu domínio $\mathbb{R}$, uma vez que a função exponencial o é. Tem-se

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \operatorname{sh} x.$$

e) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, logo sh é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, e não tem extremos.

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0$ para $x > 0$ e $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x < 0$ para $x < 0$. Logo $\operatorname{ch} x$ é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$, tendo um ponto de mínimo absoluto em 0, $\operatorname{ch} 0 = 1$.

f) Temos $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ estritamente crescente, logo a sua inversa $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad e^y - e^{-y} - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 1 - 2xe^y = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Como $e^y > 0$, temos

$$e^y = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Para argch, é semelhante, sendo que temos de restringir $\operatorname{ch} y$ a $y \geq 0$.

12. a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0, 1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).

c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

13. Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle, g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

Logo f'' tem pelo menos um zero.

14. Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Uma vez que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $]-\infty, 0[$. Por outro lado,

$$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0, 1[$ e também terá um zero em $]1, +\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.

Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

$$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.