Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

9ª Aula Prática

1. (Exercício 4.32 de [2]) Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

2. (Exercício 4.36 de [2]) Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$. (Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

3. Prove que se f é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e a equação $f(x) = x^2$ tem três soluções, sendo uma negativa, uma nula e outra positiva, então f' tem pelo menos um zero.

4. (Exercício IV.7 de [1]) Determine intervalos de monotonia, extremos locais e extremos absolutos (se existentes) para as funções:

   a) $\frac{x}{x^2+1}$,
   b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$,
   c) $|x^2 - 5x + 6|$,
   d) $x \log x$,
   e) e^{-x^2},
   f) $\frac{e^x}{x}$,
   g) xe^{-x},
   h) $\operatorname{arctg} x - \log \sqrt{1 + x^2}$.

5. (Exame 23-7-2000) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.
   c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.
   d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

6. (Exame 15-1-2003) Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Determine α e β sabendo que g tem derivada finita em $x = 0$. (Se não conseguir responder a esta pergunta, use $\alpha = -1$ e $\beta = 4$ nas alíneas seguintes.)

b) Determine $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

c) Estude g quanto à diferenciabilidade e calcule g' nos pontos onde existir.

d) Estude g quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de g.

7. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine, justificando, o contradomínio de f.

8. (Exame 9-1-06) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

a) Calcule ou mostre que não existem: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

c) Determine os intervalos de monotonia e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

9. (Exame 23-1-06) Seja g uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{tg}(g(x)) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

10. (Exercício 4.48 de [2]) Seja f uma função definida numa vizinhança de zero $V_\varepsilon(0)$, diferenciável em $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ e tal que $xf'(x) > 0$ para todo $x \in V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$.

a) Supondo que f é contínua no ponto 0, prove que $f(0)$ é um extremo de f e indique se é máximo ou mínimo. No caso de f ser diferenciável em 0 qual será o valor de $f'(0)$?

b) Mostre (por meio de um exemplo) que sem a hipótese da continuidade de f no ponto 0 não se pode garantir que $f(0)$ seja um extremo de f.

11. (Exercício IV.12 de [1]) Calcule os limites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,
    b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$,
    c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$,
    d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
    e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,
    f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$,
    g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

12. (Exercício 4.59 de [2]) Determine os limites:

    a) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x}$,
    b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

13. (Exercício 4.61 de [2]) Determine os limites:

    a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$,
    b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$.

14. (Exercício 4.63 de [2]) Calcule os limites

    a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,
    b) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$.

15. (Exercício 4.66 de [2]) Calcule os limites

    a) $\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,
    b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

16. (Exercício 4.78 de [2]) Calcule $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}$. (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$.)

17. a) Determine a fórmula de MacLaurin e a fórmula de Taylor relativa ao ponto 1, ambas de ordem 2 com resto de Lagrange, das funções seguintes: e^{2x}, $\log(1+x)$, $\cos(\pi x)$.

b) Para a fórmula de MacLaurin, determine estimativas para o erro cometido ao aproximar a função dada pelo polinómio de MacLaurin obtido no intervalo $]0,1[$.

18. Determine $e^{0,1}$ com erro inferior a 10^{-4}, sem usar a calculadora.

19. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}, \quad \text{para } x \in [0,1].$$

20. Sejam f uma função 3 vezes diferenciável e g definida por $g(x) = f(e^x)$. Dado que o polinómio de Taylor de ordem 2 de f relativo ao ponto 1 é $3 - x + 2(x-1)^2$, determine o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de g.

21. (Exercício 4.83 de [2]) Prove, recorrendo à fórmula de MacLaurin, que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a condição

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R}$$

então f é um polinómio em x de grau menor do que n.

22. Seja $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto e uma função $f \in C^2(I)$. Use a fórmula de Taylor para mostrar que, para qualquer $a \in I$,

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

23. (Exercício 4.90 de [2]) Seja f uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ e considere a função g definida por $g(x) = xf(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Se g'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $g''(0) = 0$, prove que $f(0)$ é mínimo absoluto de f.

    (**Sugestão**: Escreva a fórmula de MacLaurin de 1ª ordem de g e use-a para determinar o sinal de $f(x) - f(0)$).

24. Determine os extremos da função $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$, classificando-os, e determine os seus pontos de inflexão. Esboce o gráfico da função .

25. (Exercício 4.109 de [2]) Faça um estudo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^4 e^{-x}$ tendo em conta monotonia, extremos, pontos de inflexão, contradomínio. Esboce o gráfico da função .

26. (Exercício 4.126 de [2]) Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$ em $[0, 2\pi]$ (pode admitir que não existem pontos de inflexão).

Outros exercícios: 4.23, 4.24, 4.27, 4.31, 4.44, 4.45, 4.56, 4.58, 4.69, 4.74, 4.77, 4.82 de [2].

[1] J. Campos Ferreira. Introdução à Análise Matemática, Fundação Calouste Gulbenkian, 8ª ed., 2005.

[2] Exercícios de Análise Matemática I e II, IST Press, 2003.