Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

9ª Aula Prática

Soluções e algumas resoluções abreviadas

1. Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluimos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n+1$, temos que $c_n \to +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

2. A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em $\mathbb{R}^+$ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$$

(note-se que $x > 0$). Agora, aplicando o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$, temos que, como $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$

para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

3. Se $a < 0$ e $b > 0$ são as soluções não-nulas de $f(x) = x^2$, temos $f(b) = b^2$, $f(a) = a^2$ e também $f(0) = 0$. Aplicando o Teorema de Lagrange nos intervalos $[a, 0]$ e $[0, b]$, temos que existem $c_1 \in]a, 0[$, $c_2 \in]0, b[$ tais que

$$\frac{f(a)}{a} = f'(c_1), \quad \frac{f(b)}{b} = f'(c_2),$$

ou seja, $f'(c_1) = a < 0$ e $f'(c_2) = b > 0$. Como f' é contínua (f é de classe C^1), temos do Teorema do Valor Intermédio que existe $d \in]c_1, c_2[$ tal que $f'(d) = 0$.

4. a) $\frac{x}{x^2+1}$: (estritamente) crescente[1] em $[-1,1]$, (estritamente) decrescente em $]-\infty,-1]$ e em $[1,+\infty[$, ponto de mínimo em -1, ponto de máximo em 1, que são absolutos uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$, $f(-1)=-1/2$ e $f(1)=1/2$;

   b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$: crescente em $[-2,0[$, decrescente em $]-\infty,-2]$ e em $]0,+\infty[$, ponto de mínimo em -2, que é absoluto, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$ e $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}<0$.

   c) $|x^2-5x+6|$: crescente em $\left[2,\frac{5}{2}\right]$ e em $[3,+\infty[$, decrescente em $]-\infty,2]$ e em $\left[\frac{5}{2},3\right]$, pontos de mínimo em 2, 3, absolutos uma vez que $|x^2-5x+6|>0$, para $x\neq 2,3$, e ponto de máximo em $\frac{5}{2}$, local uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty}|x^2-5x+6|=+\infty$. (Nota: $|x^2-5x+6|$ não é diferenciável em 2 e 3.)

   d) $x\log x$: crescente em $[e^{-1},+\infty[$, decrescente $]0,e^{-1}]$, ponto de mínimo em e^{-1}, absoluto.

   e) e^{-x^2}: crescente em $]-\infty,0]$, decrescente em $[0,+\infty[$, ponto de máximo em 0, absoluto.

   f) $\frac{e^x}{x}$: crescente em $[1,+\infty[$, decrescente em $]-\infty,0[$ e em $]0,1]$, ponto de mínimo em 1, relativo uma vez que $\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{x}=-\infty$.

   g) xe^{-x}: crescente em $]-\infty,1]$, decrescente em $[1,+\infty[$, ponto de máximo em 1 que é absoluto.

   h) $\operatorname{arctg}x-\log\sqrt{1+x^2}$: crescente em $]-\infty,1]$, decrescente em $[1,+\infty[$, ponto de máximo em 1, que é absoluto.

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ é uma indeterminação do tipo $\infty\cdot0$. Escrevendo $-xe^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$, ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, a que podemos aplicar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{e^{\frac{x^2}{2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)'}{\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{xe^{\frac{x^2}{2}}}=0.$$

   Como a função é par, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$.

   b) A função $e^{-\frac{x^2}{2}}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Logo, para $x\neq0$, f é dada pelo produto de duas funções diferenciáveis, sendo portanto diferenciável. Para $x=0$:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x}=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{x^2}{2}}=1,$$

[1] Neste e noutros esboços de solução dos exercícios aplica-se, geralmente sem explicações adicionais, o seguinte raciocínio muito útil: se f é uma função diferenciável num intervalo aberto, com derivada positiva (resp. negativa), e contínua no respectivo intervalo fechado então f é estritamente crescente (resp. decrescente) no intervalo fechado. Além disso o advérbio *estritamente* será omitido pois do contexto tal é geralmente óbvio.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -e^{-\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Logo, $f_d'(0) \neq f_e'(0)$ e f não é diferenciável em 0. Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e neste caso

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Usamos a alínea anterior.
Para $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \ \wedge \ x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

logo f é crescente em $[0,1]$ e decrescente em $[1,+\infty[$.
Para $x < 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) > 0 \Leftrightarrow (x < -1 \ \vee \ x > 1) \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x < -1$$
$$f'(-1) = 0$$

logo f é crescente em $]-\infty,-1]$ e decrescente em $[-1,0]$.
Conclui-se que 1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. Como f é decrescente em $[-1,0]$ e crescente em $[0,1]$, temos também que 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

d) Temos da alínea anterior que f tem um máximo absoluto em 1, com $f(1) = e^{-\frac{1}{2}}$ e um mínimo absoluto em 0 com $f(0) = 0$, logo $f(\mathbb{R}) \subset [0, e^{-\frac{1}{2}}]$. Como f é contínua em $[0,1]$, temos também, do Teorema do Valor Intermédio, que $[0, e^{-\frac{1}{2}}] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

6. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} e^x + \alpha x + \beta & \text{se } x \leq 0, \\ \operatorname{arctg}(e^x + e^{-x} - 1) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

onde α e β são constantes reais.

a) Se g tem derivada finita em 0, será contínua em 0, logo $g(0) = g(0^+) = g(0^-)$, ou seja,

$$g(0) = 1 + \beta = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(e^x + e^{-x} - 1\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4},$$

logo $\beta = \frac{\pi}{4} - 1$. Por outro lado, g é diferenciável em 0 logo $g_e'(0) = g_d'(0)$ e temos

$$g_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x + \alpha x + \frac{\pi}{4} - 1 - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} + \alpha = \alpha + 1,$$

$$g_d'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}\left(e^x + e^{-x} - 1\right) - \frac{\pi}{4}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \left(e^x + e^{-x} - 1\right)^2} = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy na indeterminação $\frac{0}{0}$) logo $\alpha = -1$.

b)

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x - x + \frac{\pi}{4} - 1 = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg}\left(e^x + e^{-x} - 1\right) = \frac{\pi}{2}$$

(Justifique!).

c) g é diferenciável em $\mathbb{R}$ (justifique) e

$$g'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{se } x \le 0, \\ \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

d) Temos para $x \le 0$: $g'(x) = e^x - 1 < 0$ para qualquer $x < 0$ e $g'(0) = 0$. Logo g é decrescente em $]-\infty, 0]$.
Para $x > 0$: $g'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{1 + (e^x + e^{-x} - 1)^2} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Logo g é crescente em $]0, +\infty[$. Conclui-se que 0 é um ponto de mínimo, absoluto usando a continuidade de g em 0.

e) Da alínea anterior temos que $g(0) = \frac{\pi}{4}$ é um mínimo absoluto, logo $g(x) \ge \frac{\pi}{4}$ para qualquer x e $g(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$. Por outro lado, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ e g é contínua em $]-\infty, 0]$. Conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que $\left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[\subset g(\mathbb{R})$.
Logo o contradomínio de g é $g(\mathbb{R}) = \left[\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$.

7. $f(x) = |x|e^{-|x-1|}$.

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Escrevendo $-xe^{x-1} = \frac{-x}{e^{1-x}}$ temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ a que podemos aplicar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{e^{1-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{-e^{1-x}} = 0.$$

Da mesma forma,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$$

b) A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ por ser dada nesse conjunto pelo produto de duas funções diferenciáveis: $|x|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $e^{-|x-1|}$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (por ser a composta de duas funções: exponencial diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x-1|$ diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). Em $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x|e^{-|x-1|} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{xe^{-x+1} - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} e^{-x+1}(1 - x) = 0$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação $\frac{0}{0}$) e da mesma forma,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x|e^{-|x-1|}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{xe^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} e^{x-1}(1+x) = 2.$$

Logo, $f'_d(1) = 0 \neq f'_e(1) = 2$ e f não é diferenciável em 1.
No ponto 0, pode ver-se (justifique!) que $f'_d(0) = e^{-1} \neq f'_e(0) = -e^{-1}$, logo f não é diferenciável em 0, e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} (xe^{-x+1})' = e^{-x+1}(1-x), & \text{se } x > 1, \\ (xe^{x-1})' = e^{x-1}(1+x), & \text{se } 0 < x < 1, \\ (-xe^{x-1})' = -e^{x-1}(1+x), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Temos (justifique!): $f'(0) = 0 \Leftrightarrow x = -1$, estudando o sinal de f' e usando a continuidade de f,

- f crescente em $]-\infty,-1]$ e em $[0,1]$,
- f decrescente em $[-1,0]$ e em $[1,+\infty[$.

Logo, -1 é ponto de máximo, 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Como $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, 0 é mínimo absoluto. Por outro lado, $f(1) = 1$ e $f(-1) = e^{-2} < 1$, logo 1 é ponto de máximo absoluto, e consequentemente, -1 é ponto de máximo relativo.

d) Da alínea anterior, temos que $0 = f(0)$ é mínimo absoluto de f e $1 = f(1)$ é máximo absoluto de f. Logo $f(\mathbb{R}) \subset [0,1]$. Como f é contínua em $[0,1]$, do Teorema do Valor Intermédio, $[0,1] \subset f(\mathbb{R})$. Logo o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) = [0,1]$.

8. $f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,|x|$.

a)

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x + 2\,\mathrm{arctg}\,|x| = \lim_{x\to -\infty} x + \pi = -\infty.$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x + 2\,\mathrm{arctg}\,|x| = \lim_{x\to +\infty} x + \pi = +\infty.$$

b) A função arctg é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a função $|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, para $x \neq 0$, $\mathrm{arctg}\,|x|$ é dada pela composição de funções diferenciáveis, e é portanto diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e também o será $f(x)$.
Quanto a $x = 0$:

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + 2\,\mathrm{arctg}\,|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{2\,\mathrm{arctg}\,x}{x} = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{1+x^2} = 3$$

(onde se usou a Regra de Cauchy para levantar a indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ resultante de $\lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{arctg} x}{x}$.) Por outro lado,

$$f_e'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x + 2\operatorname{arctg}|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1+\frac{2\operatorname{arctg}(-x)}{x} = 1+\lim_{x\to 0^-} \frac{-2}{1+x^2} = -1.$$

Logo, como $f_d'(0) \neq f_e'(0)$, f não é diferenciável em 0.

Conclui-se que o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Temos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ 1 - \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

c) Para $x > 0$, $f'(x) = 1+\frac{2}{1+x^2} > 0$ para qualquer x, logo f é crescente em $]0, +\infty[$.
Para $x < 0$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{1+x^2}$. Temos

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \ \wedge \ x < 0 \Leftrightarrow x = -1,$$

e, como $1 + x^2 > 0$, $f'(x) > 0$ para $x < -1$, ou seja, f é crescente em $]-\infty, -1]$, e $f'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$, ou seja f é decrescente em $]-1, 0[$.
Conclui-se assim que -1 é ponto de máximo, relativo uma vez que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Por outro lado, como f é contínua e decrescente em $]-1, 0[$, crescente em $]0, +\infty[$, temos que 0 é ponto de mínimo, de novo relativo uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

d) Temos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $f(0) = 0$, e temos um máximo relativo em -1 com $f(-1) = -1 + 2\operatorname{arctg} 1 = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$. Como f é crescente e contínua em $]-\infty, -1]$ temos que, pelo Teorema do Valor Intermédio, $f(]-\infty, -1]) = \left]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$. Por outro lado, como f é decrescente e contínua em $[-1, 0]$ temos que $f([-1, 0]) = \left[0, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$. Logo $f(]-\infty, 0]) = \left]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

9. Do teorema de derivação da função composta,

$$\begin{aligned}(\varphi(x))' &= (2\operatorname{tg}(g(x)) - g(x))' \\ &= (2 + 2\operatorname{tg}^2(g(x)))g'(x) - g'(x) \\ &= g'(x)(2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1).\end{aligned}$$

Logo $\varphi'(0) = 0$. Como $g'(0) = 0$ e g' é estritamente monótona, temos que g' muda de sinal numa vizinhança de 0 (se g' é crescente, $g'(x) < g'(0) = 0$, para $x < 0$ e $g'(x) > 0$ para $x > 0$) e portanto, como $2\operatorname{tg}^2(g(x)) + 1 > 0$ para qualquer x, φ' também muda de sinal numa vizinhança de 0. Conclui-se que $\varphi(0)$ é extremo de φ (mínimo, se g' for crescente).

10. a) Como $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$, temos que para $x > 0$, $f'(x) > 0$, ou seja f é crescente em $]0, \epsilon[$, e para $x < 0$, $f'(x) < 0$, ou seja f é

decrescente em $]-\epsilon, 0[$. Como f é contínua em 0, 0 é um ponto de mínimo local.

Se f é diferenciável em 0 então $f'(0) = 0$, uma vez que 0 é ponto de extremo.

b) Por exemplo, a função $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leq 0, \\ x^2 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, com $f'(x) = 2x$, e satisfaz $xf'(x) > 0$ para $x \neq 0$. Mas 0 não é ponto de extremo, uma vez que para $x < 0$, $f(x) > f(0)$ e para $x > 0$, $f(x) < f(0)$.

11. a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x = \log a - \log b = \log \frac{a}{b}. \quad (1)$$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x + e^x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 1.$$

c) $\lim_{x\to 1}(\log x \cdot \log\log x)$ é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 1} \log x \cdot \log\log x = \lim_{x\to 1} \frac{\log\log x}{\frac{1}{\log x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log\log x}{\frac{1}{\log x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\log x}}{-\frac{1}{x\log^2 x}} = \lim_{x\to 1} -\log x = 0.$$

d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão...)

e) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}e^{-1/x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$.
(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

f) $\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x} = \lim_{x\to 1^+} e^{\log\left(x^{\log\log x}\right)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\log\log x \log x} = e^{\lim_{x\to 1^+} \log\log x \log x}.$$

Agora, de c), $\lim_{x\to 1^+} \log\log x \log x = 0$ logo

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\log\log x} = e^0 = 1.$$

g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\log\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x-1}\log x} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}\log x}.$$

Agora, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x-1}\log x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

12. a) $\lim_{x\to 0} \frac{10^x - 5^x}{x} = \log 2$ (ver 1).

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0$.
(Note que não existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'}$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

13. a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\log 2 \cdot 2^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\log 2)^2 \cdot 2^x}{2} = +\infty.$$

b) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2} 2^x = 0 \cdot 0 = 0$.

14. a) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x}.$$

Temos que $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\log x}.$$

Agora $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\log x = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\log x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\log x} = 0$$

logo $\lim_{x\to+\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

15. a) $\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (justifique!).

    b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1}$ (justifique!).

16. $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x\log x} = e^{\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\log x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\log x$, que é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x\log x = \frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n}\to 0$, temos agora

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = 1.$$

17. a) $f(x) = e^{2x}$: $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^2 = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x. A fórmula de Taylor, de ordem 2, relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned}&f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3\\ &\qquad = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^{2\xi}(x-1)^3,\end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

b) $f(x) = \log(1+x)$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3,$$

em que ξ está entre 0 e x. A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^3 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = \log 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

c) $f(x) = \cos(\pi x)$: $f'(x) = -\pi \operatorname{sen}(\pi x)$, $f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x)$, $f'''(x) = \pi^3 \operatorname{sen}(\pi x)$. Logo a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 0 será

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = 1 - \frac{\pi^2}{2}x^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)x^3,$$

em que $\xi \in]0, x[$ ou $\xi \in]x, 0[$. A fórmula de Taylor de ordem 2 relativa ao ponto 1 será

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^3 + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3 \\ = -1 + \frac{\pi^2}{2}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)(x-1)^3 \end{aligned}$$

em que ξ está entre 1 e x.

d) $f(x) = e^{2x}$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{4}{3}e^{2\xi}x^3\right| \le \frac{4e^2}{3}.$$

e) $f(x) = \log(1+x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{1}{3}\frac{1}{(1+\xi)^3}x^3\right| \le \frac{1}{3}.$$

f) $f(x) = \cos(\pi x)$: para $x \in]0, 1[$, temos também $\xi \in]0, 1[$ e

$$\left|\frac{\pi^3}{6}\operatorname{sen}(\pi\xi)x^3\right| \le \frac{\pi^3}{6}.$$

19. A fórmula de MacLaurin da função exponencial, de ordem 2 é dado por

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + r_2(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

em que $r_2(x) = \frac{e^\xi}{3!}x^3$, com ξ entre 0 e x. Então, para $x \in [0, 1]$ temos

$$\left|e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| = |\,r_2(x)| = \frac{e^{-\xi}}{3!}|x|^3 \le \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

20. Sendo a exponencial uma função indefinidamente diferenciável, em $\mathbb{R}$, temos que g é uma função de classe C^2 num vizinhança de 0 com

$$g(x) = f(e^x), \qquad g'(x) = f'(e^x)\, e^x, \qquad g''(x) = f'\,(e^x) + f''(e^x)\, e^{2x}.$$

Em particular temos

$$g(0) = f(1), \qquad g'(0) = f'(1), \qquad g''(0) = f'\,(1) + f''(1).$$

Atendendo ao polinómio de Taylor de f, de ordem 2, relativo ao ponto 1 obtemos $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $f''(1) = 4$ e consequentemente

$$g(0) + g'(0)\, x + \frac{g''(0)}{2}\, x^2 = 2 - x + \frac{3}{2}\, x^2$$

é o polinómio de Maclaurin de g, de ordem 2.

21. Nas condições dadas, $f \in C^n(\mathbb{R})$. A fórmula de MacLaurin de f, de ordem $n-1$ é dada por

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, x^{n-1}+r_{n-1}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sendo $f^{(n)}(x) = 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, a fórmula do resto de Lagrange permite concluir que

$$r_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n = 0, \qquad \text{para qualquer } x \in \mathbb{R},$$

em particular que f é um polinómio de grau menor que n.

22. Dado que $f \in C^2(I)$ a fórmula de Taylor de f, de ordem 1, relativa a um ponto $a \in I$ é

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2, \quad \forall x \in I,$$

em que ξ está entre a e x. Tomando $h > 0$ temos, para $x = a + h$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}\, h$$

e para $x = a - h$

$$\frac{f(a-h) - f(a)}{h} = -f'(a) + \frac{f''(\xi_2)}{2}\, h$$

em que $\xi_1, \xi_2 \in]a-h, a+h[\setminus\{a\}$. Resulta da igualdade

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2},$$

do facto de $\xi_1, \xi_2 \to a$, quando $h \to 0$, e da continuidade de f'' no ponto a, o limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

24. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}, \qquad f''(x) = (\frac{2x}{1+x^4})' = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$$f'''(x) = 56x^3 \, \frac{x^4-1}{(1+x^4)^3}.$$

Sendo 0 o único ponto crítico de f, ou seja solução de $f'(x) = 0$, a segunda derivada $f''(0) = 1 > 0$ mostra que f tem um mínimo no ponto 0. Atendendo a que $f(0) = 0$ e f é não negativa 0 é um mínimo absoluto.

Os pontos de inflexão de f são as soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em $\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$. Tal facto decorre de $f'''(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}) \neq 0$.

25. Dado que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ temos

$$f'(x) = (x^4 e^{-x})' = x^3\,(4-x)\,e^{-x}, \qquad f''(x) = x^2(12-8x+x^2)\,e^{-x},$$

$$f'''(x) = x\,(24-36x+12x^2-x^3)\,e^{-x},$$
$$f^{(4)}(x) = (24-96x+72x^2-16x^3+x^4)\,e^{-x}.$$

Os pontos críticos de f, i.e. as solução de $f'(x) = 0$, são 0 e 4. A função é estritamente crescente no intervalo $]0,4[$ e estritamente decrescente nos intervalos $]-\infty,0[$ e $]4,+\infty[$ porque, em tais intervalos, a função f' é positiva e negativa, respectivamente.

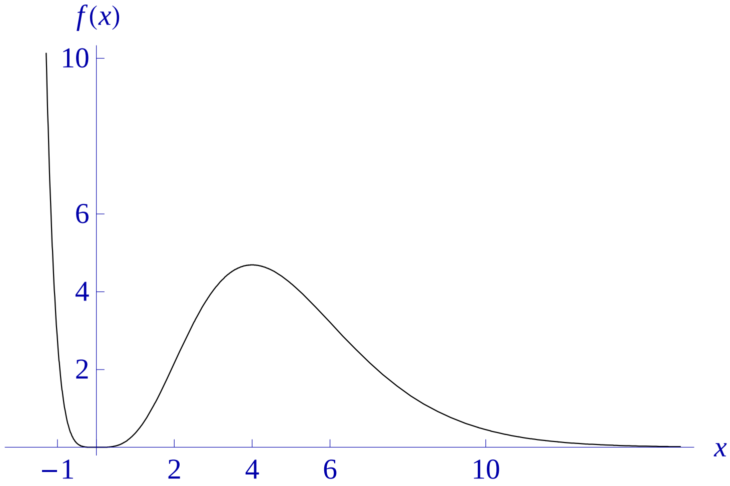
A 2ª derivada $f''(4) = -64\,e^{-4} < 0$ mostra que f tem um máximo local no ponto 4, enquanto que as 3ª e 4ª derivadas $f^{(3)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24\,e^{-4} > 0$ revela que f tem um mínimo local no ponto 0.

Os pontos de inflexão de f são soluções da equação $f''(x) = 0$, neste caso em 2 e 6. Tal facto decorre de $f^{(3)}(2) = -16e^{-2} \neq 0$ e $f^{(3)}(6) = 48e^{-2} \neq 0$.

Os limites de f em $\pm\infty$ existem, em $\overline{\mathbb{R}}$, e são dados por

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4\,e^{-x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = 0.$$

O gráfico de f pode agora ser esboçado:



f(x)
10
6
4
2
x
−1
2
4
6
10