Cálculo Diferencial e Integral I

LEA, LEM, LEAN, MEAer, MEMec

2º Semestre de 2006/2007

Aula de Revisões de Funções

1. Usando as expressões

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \cos a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \cos b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \end{aligned}$$

mostre que

a) $\operatorname{sen}(2a) = 2\operatorname{sen} a \cos a$, $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1$,

b) $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1+\cos a}{2}$, $\operatorname{sen}^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1-\cos a}{2}$,

c) $\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\cos a - \cos b = -2\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)$. (Sugestão: mostre primeiro que $\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2\operatorname{sen} y \cos x$ e faça $a = x+y$, $b = x-y$; para cos proceda da mesma forma.)

2. Mostre, usando as identidades anteriores e $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, que

a) $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$,

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

c) $\operatorname{sen}(a+2\pi) = \operatorname{sen} a$, $\cos(a+2\pi) = \cos a$ (ou seja, sen e cos são periódicas de periodo 2π),

d) $\operatorname{sen}(a+\frac{\pi}{2}) = \cos a$, $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} a$,

3. No intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, a função sen é estritamente crescente e a função cos é estritamente decrescente. (Sugestão: use c) do Exercício 1 e que $\cos x > 0$, para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.)

4. a) Mostre que

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x, \qquad \cos 3x = \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$$

b) Use as identidades anteriores para mostrar que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

5. Deduza

   a) $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para x tal que $\cos x \neq 0$ (em que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$).

   b) $\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$, para x, y tais que $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \neq -1$.

6. a) Seja $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Mostre, partindo das propriedades da exponencial e da definição de logaritmo, que $a^b = e^{b \log a}$ (donde, em particular, se deduz a identidade $\log(a^b) = b \log a$).

   b) Seja $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, e $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ a função inversa da função a^x (ou seja, $y = a^x$ sse $x = \log_a(y)$). Mostre que

$$\forall_{y>0}, \quad \log_a y = \frac{\log y}{\log a}\,.$$