Cálculo Diferencial e Integral I

1º Exame

22 de Junho de 2007, 9 horas **Duração: 3h**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,5) I. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+x-2}{x|x-3|} \geq 0 \right\}, \qquad B = \{e^{n^2} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Mostre que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-2}{x|x-3|} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2+x-2 \geq 0 \ \wedge \ x|x-3| > 0) \\
& \qquad\qquad \vee \\
& \qquad (x^2+x-2 \leq 0 \ \wedge \ x|x-3| < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \vee x \leq -2) \wedge (x > 0) \wedge (x \neq 3) \\
& \qquad\qquad \vee \\
& \qquad (-2 \leq x \leq 1) \wedge (x < 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 1 \wedge x \neq 3) \\
& \qquad\qquad \vee \\
& \qquad (-2 \leq x < 0)
\end{aligned}$$

pelo que $A = [-2, 0[\cup [1, 3[\cup]3, +\infty[$.

2. Determine, ou justifique que não existem, $\inf B$, $\sup(A \cap B)$, $\sup((\mathbb{R} \setminus A) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\min(B \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$\inf(B) = 1$ porque a sucessão $x_n = e^{n^2}$ é estritamente crescente com $x_0 = 1$. $\sup(A \cap B)$ não existe porque $A \cap B = B$ e a sucessão dada por $x_n = e^{n^2}$ não é majorada.

$\sup((\mathbb{R} \setminus A) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \sup((] - \infty, 2[\cup [0, 1[\cup \{3\}) \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

$\inf(B \cap \ (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = e$ porque a sucessão $x_n = e^{n^2}$ é estritamente crescente com $x_0 = 1$ e $x_1 = e$.

3. Sendo f uma função real, contínua em A, e (u_n) uma sucessão com os termos em A, indique justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

a) Se (u_n) é decrescente, então é convergente.

Verdadeira, porque A é minorado, logo qualquer sucessão decrescente de termos em A é limitada. Sendo monótona e limitada será convergente.

b) Se (u_n) é convergente, então $((-1)^n u_n)$ é divergente.

Falsa, por exemplo, $u_n = -\frac{1}{n} \to 0$ tem termos em A e $(-1)^n u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \to 0$.

c) Se (u_n) é convergente, então $(f(u_n))$ é convergente.

Falsa, por exemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, $u_n = -\frac{1}{n} \to 0$, f é contínua em A e $f(u_n) = -n$ não é convergente.

(3,5) II. 1. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)^n (n+1)!. \end{cases}$$

Mostre usando indução matemática que $u_n = (n!)^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

Para $n = 1$, temos $u_1 = 1 = (1!)^1$. Supondo por hipótese de indução que $u_n = (n!)^n$, para dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$u_{n+1} = u_n (n+1)^n (n+1)! = (n!)^n (n+1)^n (n+1)! = ((n+1)!)^n (n+1)! = ((n+1)!)^{n+1},$$

como queriamos mostrar.

2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a) } \lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad \text{b) } \lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n+(3n)!}}, \qquad \text{c) } \lim \left(1 + \frac{\cos n}{9^n}\right)^{(-1)^n}.$$

(a) $\lim \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = (0+0)^{+\infty} = 0.$

(b) Uma vez que $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (se este limite existir), temos

$$\begin{aligned}
\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{n+(3n)!}} &= \lim \frac{\frac{(n+1)!}{n+1+(3n+3)!}}{\frac{n!}{n+(3n)!}} = \\
&= \lim \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n+(3n)!}{n+1+(3n+3)!} = \\
&= \lim (n+1) \frac{n+(3n)!}{n+1+3(n+1)(3n+2)!} = \lim \frac{n+(3n)!}{1+3(3n+2)(3n+1)(3n)!} = \\
&= \lim \frac{\frac{n}{(3n)!}+1}{\frac{1}{(3n)!}+3(3n+2)(3n+1)} = \frac{0+1}{0+\infty} = 0.
\end{aligned}$$

(c) $\lim \left(1 + \frac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n} = 1$, uma vez que $\frac{\cos(n)}{9^n} \to 0$, já que $\cos n$ é limitada e $\frac{1}{9^n} \to 0$. Consequentemente, $1 + \frac{\cos(n)}{9^n} \to 1$. Logo, para n par, $\lim \left(1 + \frac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n} = \lim \left(1 + \frac{\cos(n)}{9^n}\right) = 1$ e para n ímpar $\lim \left(1 + \frac{\cos(n)}{9^n}\right)^{(-1)^n} = \lim \left(1 + \frac{\cos(n)}{9^n}\right)^{-1} = 1.$

(4,0) III. 1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em 0, tal que

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Calcule $f(0)$.

Como f é contínua em 0, temos $f(0) = f(0^+) = f(0^-)$. Assim,

$$f(0) = f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot \frac{\pi}{2} = 0.$$

(Alternativamente, poderia calcular $f(0^-)$.)

b) Estude f quanto à continuidade.

Em $\mathbb{R}^+$, f é dada pelo produto de duas funções contínuas: uma função trigonométrica, contínua em $\mathbb{R}$, e uma composta de uma função trigonométrica inversa, contínua em $\mathbb{R}$, com $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R}^+$. Logo f é contínua em $\mathbb{R}^+$.
Em $\mathbb{R}^-$, f é dada pelo quociente entre duas funções contínuas: o produto de uma função polinomial, contínua em $\mathbb{R}$, com uma composta de uma função exponencial com $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R}^+$, e outra função polinomial. Logo f é contínua em $\mathbb{R}^-$.
Como f é também contínua em 0, conclui-se que f é contínua em $\mathbb{R}$.

c) Calcule $f'_e(0)$ e $f'_d(0)$. Será f diferenciável em 0?

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{1+x^2} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Como $f'_e(0) \neq f'_d(0)$, f não é diferenciável em 0.

d) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Justifique que o contradomínio de f contém $]-\infty, 0]$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 e^{\frac{1}{x}}}{1+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}+1} = -\infty \cdot e^0 = -\infty.$$

Uma vez que f é contínua em $\mathbb{R}^-$ e $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, temos do teorema do valor intermédio que $]-\infty, 0]$ está contido no contradomínio de f.

2. Seja $f : [0, \frac{4}{\pi}] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e g a função definida por $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}\right)$. Determine o domínio de g e justifique que g tem máximo e mínimo.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R}: \ -1 \leq x \leq 1 \wedge \operatorname{arcsen} x \neq 0 \wedge 0 \leq \frac{1}{\operatorname{arcsen} x} \leq \frac{4}{\pi}\}.$$

Como $\operatorname{arcsen} x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ e $\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x} \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{arcsen} x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, temos

$$\begin{aligned} x \in D_g &\Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \wedge \frac{1}{\operatorname{arcsen} x} \leq \frac{4}{\pi} \\ &\Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \wedge \operatorname{arcsen} x \geq \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \wedge x \geq \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Logo $D_g = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$. Como g é contínua, por ser dada pela composição de funções contínuas, f e $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{arcsen} x}$, e o domínio de g é um intervalo (limitado e) fechado, tem-se pelo teorema de Weiertrass que terá máximo e mínimo.

Cálculo Diferencial e Integral I

2º Teste

22 de Junho de 2007, 9 horas **Duração: 1h30m**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

(As cotações dadas são para o exame. Para obter as cotações do teste multiplique por 2.)

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,5) IV. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \log(e^x + e^{-x})$.

1. Justifique que g é diferenciável no seu domínio e calcule g'.

g é diferenciável no seu domínio por ser dada pela composição de $x \mapsto \log x$, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$, com a soma de duas funções exponenciais, diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Temos

$$g'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})'}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

2. Estude g quanto à monotonia, extremos e concavidades.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow x > 0.$$

Logo, g é crescente em $]0, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, 0[$. Tem um ponto de mínimo em 0, uma vez que $g'(0) = 0$ e g' muda de sinal em 0. Como g é contínua em $\mathbb{R}$ (por ser diferenciável), tem-se do estudo da monotonia que esse mínimo é absoluto. (Não há mais pontos de extremo, já que g é diferenciável no seu domínio).
Quanto a concavidades:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0, \end{aligned}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo, a concavidade do gráfico de g está voltada para cima.

3. Seja

$$h(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

Determine o domínio de h e justifique que h é diferenciável no seu domínio. Calcule h'.

O domínio de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e esta função é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (por ser dada pela composta de g, contínua em $\mathbb{R}$ com $t \mapsto \frac{1}{t}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$). Logo, $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$ é integrável em qualquer intervalo $[a, b]$ tal que $0 \notin [a, b]$. Tem-se então que h está definida para $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 \notin \left[1, \frac{1}{x}\right]$, se $\frac{1}{x} \geq 1$, e $0 \notin \left[\frac{1}{x}, 1\right]$, se $\frac{1}{x} \leq 1$, ou seja, para $\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. O domínio de h é assim $\mathbb{R}^+$. Da continuidade de $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$, temos do Teorema Fundamental do Cálculo e da regra de derivação da função composta:

$$h'(x) = \left(\int_1^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{t}\right) dt\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' g\left(\frac{1}{1/x}\right) = -\frac{1}{x^2}\, g(x) = -\frac{1}{x^2} \log(e^x + e^{-x}).$$

4. Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}, \qquad \lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{\log x}.$$

Tem-se $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x})}{x}$ é uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$. Pela regra de Cauchy,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x + e^{-x})}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

Quanto a $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{h(x)}{\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\log x}$, temos agora uma indeterminação $\frac{0}{0}$. Pela regra de Cauchy,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\int_1^{\frac{1}{x}} g\left(\frac{1}{t}\right) dt}{\log x} = \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x^2} \log(e^x + e^{-x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} -\frac{1}{x} \log(e^x + e^{-x}) = -\log(e + e^{-1}).$$

(4,0) V. 1. Determine uma primitiva das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{b)}\ \operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}, \qquad \text{c)}\ \frac{1}{(5+x)\sqrt{x+1}}.$$

a) $P\left(\dfrac{e^{1+\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) = e^{1+\operatorname{arcsen} x}$.

b) $P\left(\operatorname{sen}(2x)\sqrt{1+\cos^2 x}\right) = P\left(2\operatorname{sen} x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\right) = -\dfrac{2}{3}(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}$.

c) Fazendo $\sqrt{x+1} = t \Leftrightarrow x = t^2 - 1$, temos

$$P\left(\frac{1}{(5+x)\sqrt{x+1}}\right) = P\left(\frac{2t}{(4+t^2)t}\right) = P\left(\frac{2}{4+t^2}\right) =$$
$$= P\left(\frac{2}{4(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2)}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right).$$

2. Calcule a área da região $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ 0 \le y \le \frac{1}{x^2}\log x,\ x \le 2\}$.

Pontos de intersecção:

$$\frac{1}{x^2}\log x = 0 \Leftrightarrow \log x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $\frac{1}{x^2}\log x > 0$ para $1 < x < 2$, a área é dada por:

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\log x\,dx = \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= -\frac{1}{2}\log 2 + 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}.$$

3. Seja f uma função contínua em $\mathbb{R}$ e F um integral indefinido de f, $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$.

a) Justifique que F é constante se e só se $F(x) = 0$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

Se $F(x) = 0$ para qualquer $x\in\mathbb{R}$, então F é connstante. Reciprocamente, suponhamos que $F(x) = K$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$. Como f é contínua, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que F é diferenciável com $F'(x) = f(x)$. Temos então $f(x) = F'(x) = 0$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$. Logo $F(x) = \displaystyle\int_a^x 0\,dt = 0$.

b) Justifique que se $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt$, para alguns $b,c\in\mathbb{R}$, então existe $d\in\mathbb{R}$ com $f(d) = 0$.

Temos $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt \Leftrightarrow F(b) = F(a)$. Como F é diferenciável em $\mathbb{R}$, tem-se do Teorema de Rolle que existe $d\in\mathbb{R}$ tal que $F'(d) = 0 \Leftrightarrow f(d) = 0$.

(2,5) VI. 1. Determine a natureza das séries seguintes:

$$\text{a)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right).$$

a) É uma série de termos não negativos. Temos

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+2}} = \lim \sqrt{\frac{n^2}{n^2+2}} = 1 \neq 0, +\infty.$$

Do critério geral de comparação, as séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ e $\sum \frac{1}{n}$ têm a mesma natureza e portanto $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$ é divergente, uma vez que $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Dirichlet $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ com $\alpha \leq 1$).

b) É uma série alternada. Temos $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ e $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$ é decrescente, uma vez que $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ é crescente e $\frac{1}{n}$ é decrescente. Logo, do critério de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)$ é convergente.

2. Considere a seguinte série de potências $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(x+1)^n$.

a) Determine o intervalo de convergência da séries de potências dada, indicando os pontos onde a convergência é absoluta e simples.

É uma série de potências centrada em -1. O raio de convergência é dado por:

$$R = \lim \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{3^{n+1}+1}\right|} = \lim \frac{3^{n+1}+1}{3^n+1} = \lim \frac{3+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = 3.$$

Logo, a série converge absolutamente para $|x+1| < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$ e diverge para $|x+1| > 3 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 2$. Para $x = -4$, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(-3)^n = \sum_{n=2}^{\infty} -\frac{3^n}{3^n+1}.$$

Como $\lim -\frac{3^n}{3^n+1} = -1 \neq 0$, a série é divergente. Para $x = 2$, temos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(3)^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{3^n+1}.$$

De novo, $(-1)^{n+1}\frac{3^n}{3^n+1}$ não converge para 0 e a série é divergente.

b) Sendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}(x+1)^n$, para x no intervalo obtido em a), determine $f^{(n)}(-1)$, $n \in \mathbb{N}$, e justifique que -1 é um ponto de extremo de f, classificando-o.

Temos $f^{(n)}(-1) = n!\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n+1}$ para $n \geq 2$ e $f(0) = f'(0) = 0$. Como $f'(0) = 0$ e $f''(0) = -\frac{2}{7} < 0$, -1 é ponto de mínimo de f.