Cálculo Diferencial e Integral I

2º Exame

6 de Julho de 2007, 9h **Duração: 3h**

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{\pi}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Mostre que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]0, \pi\right]$.

$$\begin{aligned} \frac{|x| - \pi}{2x^2 + 3x} \leq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (|x| \leq \pi \ \wedge \ 2x^2 + 3x > 0) \\ &\qquad \vee \\ &\qquad (|x| \geq \pi \ \wedge \ 2x^2 + 3x < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (-\pi \leq x \leq \pi \wedge (x > 0 \vee x < -\frac{3}{2})) \\ &\qquad \vee \\ &\qquad (x \leq -\pi \vee x \geq \pi) \wedge (-\frac{3}{2} < x < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (0 < x \leq \pi) \\ &\qquad \vee \\ &\qquad (-\pi \leq x < -\frac{3}{2}) \end{aligned}$$

pelo que $A = \left[-\pi\,, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]0, \pi\right]$.

b) Determine ou mostre que não existem, em $\mathbb{R}$, $\min A \cap \mathbb{Q}$, $\sup(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, $\inf B$, $\max(A \cap B)$.

$\min A \cap \mathbb{Q}$ não existe. De facto, sendo $V_\epsilon(-\pi) \cap A \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, para qualquer $\epsilon > 0$, e $-\pi$ um minorante de A (ou seja $-\pi$ é o ínfimo de $A \cap \mathbb{Q}$) a irracionalidade de $-\pi$ mostra que não existe $\min A \cap \mathbb{Q}$.

$\inf B = 0$ porque a sucessão dada por $x_n = \frac{\pi}{n}$ é estritamente decrescente e converge para 0.

$\max A \cap B = \pi$ porque, $A \cap B = B$ e $\frac{\pi}{n} = \pi$, para $n = 1$.

$\sup(A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) = \pi$ porque $\sup A = \pi$ e $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

c) Seja (x_n) uma sucessão crescente com os termos em $A \cap \mathbb{R}^+$. Justifique as seguintes afirmações:

i) (x_n) é convergente e $\lim x_n \in A$.

Como A é majorado, (x_n) será majorada. Sendo crescente e majorada, é convergente e $\lim x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n \in A$, já que $\sup A \in A$.

ii) Para qualquer função f contínua em A, $(f(x_n))$ é uma sucessão convergente.

Uma vez que (x_n) é convergente e $\lim x_n \in A$, segue directamente da definição de continuidade de f em A que $(f(x_n))$ é convergente (com $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$).

2. Seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_1 = 1 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+2u_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

a) Prove, por indução matemática, que

$$u_n = \frac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}, \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}_1.$$

b) Determine a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

a) Para $n = 1$ a condição acima fica $u_1 = \frac{2^{1-1}}{3^1-2^1} = \frac{1}{3-2} = 1$ que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: Para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{3^n - 2^n}$.

Tese: $u_{n+1} = \dfrac{2^n}{3^{n+1} - 2^{n+1}}$.

Da definição por recorrência, temos $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3+2u_n}$ e da hipótese de indução, resulta

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{3+2u_n} = \frac{2\frac{2^{n-1}}{3^n-2^n}}{3+2\frac{2^{n-1}}{3^n-2^n}} = \frac{2^n}{3^n-2^n} \cdot \frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-32^n+2^n} \\ &= \frac{2^n}{3^{n+1}-(3-1)2^n} = \frac{2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}. \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

b) Atendendo a que se trata de uma série de termos positivos e que o limite

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{\frac{2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}}}{\frac{2^{n-1}}{3^n-2^n}} = \lim 2\,\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}-2^{n+1}} = 2\lim \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3}$$

existe e é menor que 1, conclui-se do critério d'Alembert que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente.

3. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(2n)!}\right)^{2^{2n}}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}.$$

a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(2n)!}\right)^{2^{2n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\frac{2^{2n}}{(2n)!}}{2^{2n}}\right)^{2^{2n}} = e^0 = 1$, uma vez que $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$, pela escala de sucesões.

b) Temos uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = 1.$$

(7,0) II. 1. Considere a função $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ tal que h é par e, para $x>0$, $h(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Calcule $\lim_{x\to 0} h(x)$ e justifique que h é prolongável por continuidade a 0.

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{1}{0^+} = \frac{\pi}{2}$. Como h é par, $h(-x) = h(x)$ e $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)$. Logo $\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\pi}{2}$. Como este limite existe em $\mathbb{R}$, a função é de facto prolongável por continuidade a 0.

b) Sendo $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o prolongamento por continuidade de h a 0, decida se H é diferenciável em 0.

Temos $H(0) = \lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} H'_d(0) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)-\frac{\pi}{2}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}{1+\frac{1}{x}}}{1} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}} = -\infty. \end{aligned}$$

Como $H'_d(0)$ não existe em $\mathbb{R}$, H não é diferenciável em 0.

2. Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{x/(x^2-2x+2)}.$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule $f'(x)$.

Sendo $x \mapsto \frac{x}{x^2-2x+2}$ uma função racional definida em $\mathbb{R}$, é também diferenciável em $\mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$ porque é a composta da função exponencial, diferenciável em $\mathbb{R}$, com uma função igualmente diferenciável em $\mathbb{R}$.

A derivada de f, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-2x+2}\right)' e^{\frac{x}{x^2-2x+2}} = \frac{2-x^2}{(x^2-2x+2)^2}\, e^{\frac{x}{x^2-2x+2}}\,.$$

b) Determine os intervalos em que f é monótona.

Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, os respectivos intervalos de monotonia são determinados pelo sinal de f'. Assim

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow (2-x^2) < 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}$$

e

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x^2) > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Podemos então concluir que

$$f(x) \text{ é estritamente decrescente no intervalo }]-\infty, -\sqrt{2}],$$

$$f(x) \text{ é estritamente decrescente no intervalo } [\sqrt{2}, +\infty[,$$

$$f(x) \text{ é estritamente crescente no intervalo } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

c) Verifique que f tem extremos nos pontos $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ e diga se são pontos de máximo ou mínimo, local ou absoluto. Determine, justificando, o contradomínio de f.

f tem um mínimo no ponto $x = -\sqrt{2}$ porque $f'(-\sqrt{2}) = 0$ com

$$f(x) \text{ est. decrescente em }]-\infty, -\sqrt{2}] \text{ e est. crescente em } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

f tem um máximo no ponto $x = \sqrt{2}$ porque $f'(\sqrt{2}) = 0$ com

$$f(x) \text{ est. crescente em } [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ e est. decrescente em } [\sqrt{2}, +\infty[.$$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-2x+2}} = e^0 = 1$ e $f(-\sqrt{2}) = e^{-\frac{\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}} < e^0 = 1$ e $f(\sqrt{2}) = e^{\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}} > e^0 = 1$, temos que $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são pontos de extremo absoluto de f. Dado que f é contínua em $\mathbb{R}$, por ser diferenciável, o teorema do valor intermédio garante que $f(\mathbb{R}) = [f(-\sqrt{2}), f(\sqrt{2})]$.

d) Mostre que a função g definida, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, por

$$g(x) = \int_0^{2x} f(t)\, dt$$

é duas vezes diferenciável e calcule $g'(x)$ e $g''(x)$.

Sendo a função integranda f diferenciável em $\mathbb{R}$, é também contínua em $\mathbb{R}$ e consequentemente, do teorema fundamental do cálculo, o integral indefinido

$$\varphi(u) = \int_0^u f(t)\,dt$$

é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada $\varphi'(u) = f(u)$. Da regra de derivação da funçã o composta, g é então diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$g'(x) = (2x)'\varphi'(2x) = 2\,f(2x).$$

e segunda derivada

$$g''(x) = 2(2x)'f'(2x) = \frac{2(1-2x^2)}{(2x^2-2x+1)^2}\, e^{\frac{x}{2x^2-2x+1}}.$$

e) Determine o sinal de g e verifique que g é crescente em $\mathbb{R}$. Determine os pontos de inflexão do gráfico de g.

Como $f(x) > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $g(x) > 0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ e $g(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. De $g'(x) = 2f(2x) > 0$, temos também que g é crescente. Sendo g duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, o sentido da concavidade do seu gráfico é determinado pelo sinal de g''. Assim

$$g''(x) < 0 \Leftrightarrow (1-2x^2) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$g''(x) > 0 \Leftrightarrow (1-2x^2) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Temos assim que $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ são os pontos de inflexão do gráfico de g.

(6,0) III. 1. Determine a função $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que

$$F'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \qquad F(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Uma primitiva de F' é dada por

$$\begin{aligned} P\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - P\left(x\,\frac{\left(\frac{-2}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,P\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\,x. \end{aligned}$$

Sendo que qualquer outra primitiva de F' em $\mathbb{R}^+$ é obtida da anterior por soma de uma constante real, então

$$F(x) = x\,\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C,$$

$C \in \mathbb{R}$. A condição $F(1) = \frac{\pi}{2}$ significa que

$$F(1) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \log(2) + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad C = \log(2).$$

Resulta que

$$F(x) = x \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \operatorname{arctg} x + \log(2)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

2. Calcule o valor dos seguintes integrais:

$$\text{a)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\, dx, \qquad \text{b)} \int_0^{\log 2} \frac{e^x - 1}{e^x(e^x+1)}\, dx.$$

a) A função integranda é imediatamente primitivável no intervalo de integração considerado. Aplicando a regra de Barrow resulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\, dx = [\operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{sen}(1).$$

b) O método de integração por substituição é aplicável recorrendo à substituição $e^x = t \Leftrightarrow x = \log t$:

$$\int_0^{\log 2} \frac{e^x - 1}{e^x(e^x+1)}\, dx = \int_1^2 \frac{t-1}{t(t+1)} \frac{1}{t}\, dt = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2(t+1)}\, dt.$$

Obtem-se uma função racional com a seguinte decomposição em fracções simples:

$$\frac{t-1}{t^2(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} = \frac{At^2 + At + Bt + B + Ct^2}{t^2(t+1)},$$

ou seja, $B = -1$, $A + B = 1 \Leftrightarrow A = 2$, $A + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$. Logo,

$$\int_1^2 \frac{t-1}{t^2(t+1)}\, dt = \int_1^2 \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t+1}\, dt = \left[2\log|t| + \frac{1}{t} - 2\log|t+1|\right]_1^2$$

$$= 2\log 2 + \frac{1}{2} - 2\log 3 - 1 + 2\log 2 = 4\log 2 - \frac{1}{2} - 2\log 3.$$

3. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n}$.

a) Determine o intervalo de convergência da série dada e a sua soma.

Tem-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{2}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $-\frac{x-2}{2}$.
Logo, a série converge absolutamente se $\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1$ e diverge se $\left|-\frac{x-2}{2}\right| \geq 1$.
O intervalo de convergência é assim dado por $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$\left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 4.$$

(Alternativamente, poder-se-ia calcular o raio de convergência.) A soma é dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n} = \frac{1}{1-\left(-\frac{x-2}{2}\right)} = \frac{2}{x}.$$

b) Sendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-1)^n 2^n}$, indique $f^{(100)}(2)$.

Uma vez que a série dada corresponde à série de Taylor no ponto 2 de f, no seu intervalo de convergência, temos

$$\frac{f^{(100)}(2)}{100!} = \frac{1}{(-1)^{100} 2^{100}} \Leftrightarrow f^{(100)}(2) = \frac{100!}{2^{100}}.$$

(2,0) IV. Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(1) = 1$ e que, para qualquer $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 f(x)^2}.$$

1. Mostre que, para qualquer $x \geq 1$,

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

(**Sugestão**: Poderá ser-lhe útil verificar que f é crescente.)

Dado que $f'(x) > 0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$, a função f é estritamente crescente e

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(1) = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1 + x^2 [f(x)]^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Resulta da monotonia do integral e da aplicação da regra de Barrow que, para qualquer $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2} \quad & \Rightarrow \quad \int_1^x f'(t)\,dt \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ & \Rightarrow \quad f(x) - f(1) \leq \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \\ & \Rightarrow \quad f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2}. \end{aligned}$$

2. Prove que existe o limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$.

No intervalo $[1, +\infty[$ a função f é limitada, com se verifica da desigualdade

$$f(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} = 1 + [\operatorname{arctg} t]_1^x = 1 + \operatorname{arctg}(x) - \frac{\pi}{4} \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$

e sendo f uma função estritamente crescente fica garantida a existência de limite em $+\infty$. Da desigualdade anterior, resulta

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}.$$