Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste

21 de Abril de 2007 **9 horas**

LEA, MEAer, LEAN, MEEC, LEEC, LEM, MEMec

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,5) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 - x|}{x-1} \le 2 \right\}, \quad B = \{\sqrt{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A =]-\infty, 1[\cup]1, 2]$.

b) Determine, ou mostre que não existem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\max(A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\max B$, $\inf(B \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(B \cap \mathbb{Q})$.

c) Dê um exemplo, ou justifique a não-existência, de sucessões reais (u_n) tais que:

i) (u_n) tem termos em A, é crescente e divergente.

ii) (u_n) tem termos em A e converge para um elemento de $\mathbb{R} \setminus A$.

iii) (u_n) tem termos em B e é convergente.

(4,5) 2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)! + 4^n}{2^n + (4n)!}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}((-1)^n n)}{(-1)^n n}.$$

(8,0) II. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \sqrt{\pi - 4 \operatorname{arctg}(1/x)}.$$

1. Mostre que $D =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ é o domínio da função f.
2. Calcule, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$,
$$\lim_{x\to 0^-} f(x).$$
Será f prolongável por continuidade a $x = 0$?
3. Estude f quanto à continuidade.
4. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Determine, justificando, o contradomínio de f.
5. Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} (x-1)f(x), & \text{se } x \ge 1 \\ \alpha & \text{se } x < 1. \end{cases}$$
Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual g é diferenciável no ponto 1, indicando $g'(1)$. Justifique a resposta.

(3,0) III. Considere números reais $\beta > \alpha > 0$ e a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + \alpha^2}{2u_n} \quad \text{para } n \ge 1. \end{cases}$$

1. Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente com termos positivos.
2. Justifique que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.