INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Departamento de Matemática

21 de Abril de 2007

Cálculo Diferencial e Integral I

Resolução do 1º Teste

LEA, MEAer, LEAN, LEM, MEMec, MEEC, LEEC

I

1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x^2 - x|}{x-1} \leq 2 \right\}, \quad B = \{\sqrt{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Mostre que $A =]-\infty, 1[\cup]1, 2]$.

$$\begin{aligned} \frac{|x^2 - x|}{x-1} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |x| \, \frac{|x-1|}{x-1} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \quad (|x| \leq 2 \wedge x > 1) \vee (|x| \geq -2 \wedge x < 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (1 < x \leq 2) \vee (x < 1) \\ &\Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 1[\cup]1, 2] \end{aligned}$$

pelo que $A =]-\infty, 1[\cup]1, 2]$.

b) Determine, ou mostre que não existem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\max(A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\max B$, $\inf(B \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(B \cap \mathbb{Q})$.

$\inf A$ não existe, em $\mathbb{R}$, porque A contém o intervalo não minorado $]-\infty, 1[$.

$\max(A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ não existe porque 2 é o supremo mas não um elemento de $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. De facto, 2 é majorante de $A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$2 \in \mathbb{Q} \qquad \text{e} \qquad V_\epsilon(2) \cap (A \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset, \quad \forall \epsilon > 0.$$

Atendendo a que $B = \left\{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots\right\}$ temos

$$\inf B \cap \ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \sqrt{2}.$$

$$\left. \begin{array}{c} \max B \\ \sup(B \cap \mathbb{Q}) \end{array} \right\} \text{ não existem, em } \mathbb{R}, \text{ porque } \mathbb{N} \subset B \text{ logo } B \text{ e } B \cap \mathbb{Q} \text{ não são majorados.}$$

c) Dê um exemplo, ou justifique a não-existência, de sucessões reais (u_n) tais que:

i) (u_n) tem termos em A, é crescente e divergente.

Não existe tal sucessão. Uma vez que A é majorado, qualquer sucessão crescente em A será monótona e limitada, logo convergente.

ii) (u_n) tem termos em A e converge para um elemento de $\mathbb{R} \setminus A$.

> (u_n) dada por
> $$u_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$$
> é um exemplo de uma sucessão que satisfaz a condição ii).

iii) (u_n) tem termos em B e é convergente.

> (u_n) dada por
> $$u_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$$
> é um exemplo de uma sucessão que satisfaz a condição iii).

2. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{2}{n}}, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)! + 4^n}{2^n + (4n)!}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}((-1)^n n)}{(-1)^n n}.$$

> a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{3^{\frac{n}{2}}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}} =$ $1^0 = 1$, uma vez que $0 < \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, logo $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n \to 0$.
>
> b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)! + 4^n}{2^n + (4n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(4n)!} \frac{1 + \frac{4^n}{(2n)!}}{\frac{2^n}{(4n)!} + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(4n)!} =$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+1)...(4n)} = 0$, uma vez que $0 < \frac{4^n}{(2n)!} < \frac{4^n}{n!} \to 0$ e da mesma forma, $\frac{2^n}{(4n)!} \to 0$.
>
> c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}((-1)^n n)}{(-1)^n n} = 0$, uma vez que $\operatorname{sen}((-1)^n n)/(-1)^n$ é limitada e $\frac{1}{n} \to 0$.

II

Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = \sqrt{\pi - 4\operatorname{arctg}(1/x)}.$$

1. Mostre que $D =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ é o domínio da função f.

> O domínio da função f é o conjunto
> $$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} : \pi - 4\operatorname{arctg}(1/x) \geq 0 \wedge x \neq 0\} &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1/x \leq \operatorname{tg}(\pi/4)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : 1/x \leq 1\} \\ &= \ ]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[.\end{aligned}$$

2. Calcule, se existir em $\overline{\mathbb{R}}$,
$$\lim_{x\to 0^-} f(x).$$
Será f prolongável por continuidade a $x=0$?

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{\pi - 4\,\mathrm{arctg}(1/x)} = \sqrt{\pi - 4(-\pi/2)} = \sqrt{3\pi}.$$

f é prolongável por continuidade a $x=0$ dado que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ é finito.

3. Estude f quanto à continuidade.

Sendo $x \mapsto 1/x$ uma função racional contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $x\mapsto \mathrm{arctg}\,x$ contínua em $\mathbb{R}$ o teorema da continuidade da função composta garante que $x\mapsto \mathrm{arctg}(1/x)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Da mesma forma a continuidade da função polinomial $x\mapsto \pi - 4x$ garante que $x\mapsto \pi - 4\,\mathrm{arctg}(1/x)$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Esta última função é não-negativa em $]-\infty,0[\,\cup\,[1,+\infty[$ pelo que o teorema da continuidade da função composta garante que f é contínua no seu domínio.

4. Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Determine, justificando, o contradomínio de f.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\pi - 4\,\mathrm{arctg}(1/x)} = \sqrt{\pi - 4\cdot 0} = \sqrt{\pi}.$$

Decorre da monotonia de $x\mapsto \mathrm{arctg}\,x$ que $x\mapsto \mathrm{arctg}(1/x)$ é uma função estritamente decrescente nos intervalos $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}^+$. Consequentemente f é estritamente crescente nos intervalos $]-\infty,0[$ e $[1,+\infty[$. A continuidade de f e o teorema do valor intermédio garantem que o contradomínio de f é

$$[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)[\,\cup\,]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to 0^-} f(x)[= \left[0,\sqrt{\pi}\right[\,\cup\,\left]\sqrt{\pi},\sqrt{3\pi}\right[$$

5. Considere a função $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$g(x) = \begin{cases} (x-1)f(x), & \text{se } x\geq 1 \\ \alpha & \text{se } x<1. \end{cases}$$
Determine o valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ para o qual g é diferenciável no ponto 1, indicando $g'(1)$. Justifique a resposta.

Para as derivadas laterais da função g no ponto 1 temos

$$g'_d(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h-1)f(1+h)-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} f(1+h) = 0,$$

$$g'_e(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\alpha}{h} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<0 \\ 0 & \text{se } \alpha=0 \\ -\infty & \text{se } \alpha>0 \end{cases}$$

Então g é diferenciável no ponto 1 apenas se $\alpha=0$, e nesse caso $g'(1)=0$.

III

(3,0) Considere números reais $\beta > \alpha > 0$ e a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = \beta, \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + \alpha^2}{2u_n} \quad \text{para } \ n \geq 1. \end{cases}$$

1. Mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente com termos positivos.

Mostra-se por indução matemática que (u_n) tem termos positivos. De facto, $u_1 = \beta > 0$ e se por hipótese de indução for $u_n > 0$ temos

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + \alpha^2}{2u_n} > 0.$$

Da mesma forma verificamos que $u_n > \alpha$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. De facto, $u_1 = \beta > \alpha$ e se por hipótese de indução for $u_n > \alpha$ temos

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{u_n^2 + \alpha^2}{2u_n} - \alpha = \frac{(u_n - \alpha)^2}{2u_n} > 0,$$

dado que (u_n) tem termos positivos.
Que (u_n) é uma sucessão decrescente é agora simples de provar

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + \alpha^2}{2u_n} - u_n = \frac{(\alpha - u_n)(u_n + \alpha)}{2u_n} < 0.$$

2. Justifique que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

Da alínea anterior temos que (u_n) é monótona e limitada. De facto

$$0 < u_n \leq u_1 \text{ para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Assim (u_n) é convergente com $\lim u_n = a \in \mathbb{R}$. Sendo $\lim u_{n+1} = \lim u_n = a$, o número a satisfaz a condição

$$a = \frac{a^2 + \alpha^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad |a| = \alpha.$$

Atendendo a que (u_n) tem termos positivos, obtemos $\lim u_n = \alpha$.