Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática II - 1º Semestre 2001/2002
2º Teste / 1º Exame - 11 de Janeiro de 2001 - 9 h

Todos os cursos excepto Eng. Civil, de Território, Física Tecnológica e Lic. Matemática

1º exame: todos os grupos. Duração: 3h
2º teste: grupos 5, 6 e 7. Duração: 1h 30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

(1.5 val.) (a) 2^{x+2^x}

(1.5 val.) (b) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$

(2.5 val.) **2.** Calcule o integral definido

$$\int_0^1 \frac{e^{3x}+e^{2x}-3e^x}{(e^x+1)(e^{2x}+2)}\,dx$$

(2 val.) **3.** Calcule a área da região plana limitada pelas curvas de equações

$$y = \arctan x \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{4}x^2$$

(2.5 val.) **4.** Determine uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_k^x tf(t)\,dt = \sin x - x\cos x - \frac{1}{2}x^2$$

(1.5 val.) **5.** Seja D o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dado pelas condições

$$-2 < x < 2 \qquad -1 < y < 1 \qquad |x| \neq 2|y|.$$

Esboce o conjunto D e o conjunto dos seus pontos fronteiro. Diga, justificando, se D é a) aberto, b) fechado, c) limitado, d) conexo.

6. Sejam f e g duas funções de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ em $\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y) = \frac{x(x^2-y)}{x^2+y^2} \qquad g(x,y) = \frac{5x^2\sin(\pi y/8)}{x^2+y^2}.$$

(2 val.) (a) Calcule , ou mostre que não existem, os limites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y).$$

(2 val.) (b) Seja $\tilde{f}$ a função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$\begin{array}{rclcrcl} \tilde{f}(x,y) & = & f(x,y) & \qquad & (x,y) & \neq & (0,0) \\ & = & 0 & & (x,y) & = & (0,0). \end{array}$$

Calcule o gradiente $\nabla\tilde{f}(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Diga, justificando, qual é o domínio de diferenciabilidade de $\tilde{f}$.

(1.5 val.) (c) Seja $v = (1,1)$. Calcule a derivada segundo v da função g no ponto $(2,4)$. (Pode assumir que g é diferenciável no seu domínio.)

(1.5 val.) (d) Seja $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função dada por $h(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. Indique as matrizes Jacobeanas de h e $h \circ h$ no ponto $(2,4)$.

(1.5 val.) **7.** Seja X um subconjunto compacto de $\mathbf{R}^n$ e u um ponto de X. Mostre que existe pelo menos um ponto de X cuja distância a u é maximal. Justifique cuidadosamente todos os passos do seu raciocínio, e enuncie qualquer teorema que usar.