Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

LEEC e LEGI - 2º exame

Data: 11/7/2001

I.

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$x(x^4+1), \qquad \frac{\operatorname{sen}(\log 3x)}{2x}, \qquad \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

2. Determine a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfaz às seguintes condições:

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{e^{3x}-e^{2x}-1}{e^x+3e^{3x}} & \forall x\in\mathbb{R}\,, \\ f(0) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

3. Calcule a área da região plana delimitada pela recta que passa pelos pontos $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(-1,-\frac{\pi}{4}\right)$, e pelo gráfico de $\arctan x$.

4. Seja $f\in C^2(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$f(0)=f'(0)=0$$
$$f''(0)\neq 0\,.$$

   Seja ainda $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi(x)=\int_{-x}^{x^2} f(t)\,dt\,.$$

   Justifique que f tem um extremo local em 0 e prove que φ não tem, no mesmo ponto, extremo local.

II.

1. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função tal que $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1\,.$

   Seja ainda $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x,y) = f\left(y \operatorname{sen} x, y^2\right)\ .$$

   a) Mostre que $(0,0)$ é uma ponto de estacionaridade de φ.

   b) Mostre que a matriz hessiana de φ no ponto $(0,0)$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   c) Terá φ um extremo local em $(0,0)$? Justifique.

2. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 \arctan x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   a) Justifique que ψ é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcule $\psi'(0,1)$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}(0,1)$, onde $v = (1,1)$.

   b) Mostre que ψ é contínua em $(0,0)$. [Sugestão: Comece por provar que $|\arctan x| \leq |x|$].

   c) Será ψ diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

III.

Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $p \in \mathbb{N}^+$. Suponha ainda que

$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad \text{para todo } n > p,$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(p)}(x)|, \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R} \text{ e para todo o inteiro } n > p.$$

Prove que f é uma função polinomial.