Análise Matemática II

2º exame

11 de Julho de 2001

Licenciaturas em Engenharia Química, Química e Engenharia Biológica

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(11,0) **I.** 1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\displaystyle\int 2xe^{x^2}\,\mathrm{sen}(e^{x^2})\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x^4}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{t+1}+1}\,dt$.

2. Calcule o integral

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} t\,dt.$$

3. Calcule a área da região do plano definida por

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1 \le x^2+(y-1)^2, x\le 1, y\le 1\}.$$

4. Seja $s\in\mathbb{R}$ e considere uma função $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y)\begin{cases}(x^2+y^2)^{s/2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)-x-y, & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determine para que valores de $s\in\mathbb{R}$ é que a função g é contínua em $(0,0)$.

b) Determine para que valores de $s\in\mathbb{R}$ é que a função g é diferenciável em $(0,0)$.

5. Considere a função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$h(x)=\begin{cases}\frac{e^{x^3}-1}{x^2}, & \text{se } x\neq 0,\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases}$$

a) Determine a respectiva série de MacLaurin e o intervalo em que esta representa a função.

b) Determine um polinómio de segundo grau $P(x,y)$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h(x^2+y^2)-P(x,y)}{x^2+y^2} = 0.$$

(5,0) **II.** 1. Sejam $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(0,0,0) = (\lambda,\lambda,\lambda)$ para algum $\lambda\in\mathbb{R}$, $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ uma função definida por $H(x,y,z) = (x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$ e defina $F = G\circ H$. Calcule ∇F nos pontos da recta definida por $x=y=z$.

2. Considere $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = xy(x^2-y^2)$.

a) Determine os pontos de estacionaridade de ϕ e classifique-os quanto a serem ou não pontos de máximo e mínimo local de ϕ.

b) Determine os pontos de extremo absoluto da restrição de ϕ ao conjunto definido por $1\geq y\geq |x|$.

(4,0) **III.** 1. Considere $f:\,]0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ contínua, não-negativa e limitada e uma função $\psi:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\psi(x,y) = \int_{\frac{|x|+|y|}{2}}^{\max\{|x|,|y|\}} f(t)\,dt, \qquad \text{para } (x,y)\neq(0,0).$$

a) Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\psi(x,y)$.

b) Mostre que existe uma constante $C>0$ tal que $|\psi(x,y)|\leq C\max(|x|,|y|)$.

c) Mostre que se $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$ então o prolongamento por continuidade de ψ a $(0,0)$ é diferenciável em $(0,0)$.

2. Seja $\theta:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty[$ uma função que satisfaz $\lim_{\|x\|\to\infty}\|x\|\theta(x) = 0$, $\theta(0)=0$ e $\theta(x)>0$ se $x\neq 0$. Definem-se $\theta_k(x) = k\theta(kx)$ para $k\in\mathbb{N}$. Mostre que $\lim_{k\to\infty}\theta_k(x) = 0$, que a convergência não é uniforme em $\mathbb{R}^n$ mas é uniforme no complementar de qualquer bola centrada em 0.