Análise Matemática II

2º Exame - 12 de Julho de 2000

Ele., Eng. Bio., Eng. Quí., Ges. e Quí.

Duração: 3 horas

Apresente os cálculos

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções (4)

$$e^{x+\pi}, \qquad \frac{x^5}{x^2-1}, \qquad \arctan x, \qquad \frac{\sin(2x)}{(1+\cos^2 x)\cos x}.$$

2. Calcule (2.5)

$$\frac{d}{dx}\int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^{13}}\,dt.$$

3. Calcule, ou mostre que não existe, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^4+2y^2}$. (2)

4. Considere os conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| > |x|\}$ e $S = A \cap B$.

a) Esboce S. (1)

b) Identifique $\operatorname{int} S$, $\operatorname{ext} S$ e ∂S e diga se S é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado. (1.5)

c) Esclareça se S é ou não conexo e, caso seja desconexo, escreva-o como união de dois subconjuntos separados e não vazios. (1)

5. Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y) = (x-2)(y^3-x)$. Determine os seus pontos de estacionaridade e classifique-os. (3.5)

6. Considere um corpo $\mathcal{C}$ de massa m, a uma altura h acima da superfície da Terra. Arbitrando que a energia potencial gravítica é nula à superfície da Terra, a energia potencial de $\mathcal{C}$ é dada por

$$E(h) = mgR - \frac{mgR^2}{R+h},$$

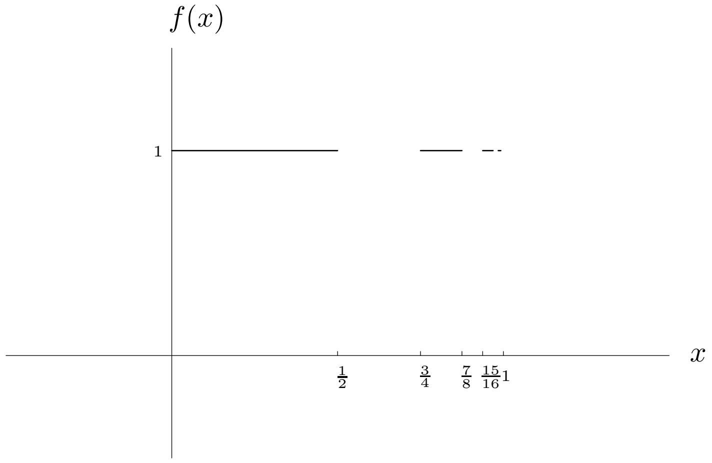
onde $R > 0$ é o raio da Terra e $g > 0$ é a acelaração da gravidade à sua superfície.

a) Utilizando a fórmula de MacLaurin da função E, mostre que, se h é muito pequeno relativamente a R, a energia potencial gravítica é aproximadamente igual a mgh. (2)

b) Usando a expressão do resto de Lagrange, obtenha uma estimativa do erro que se comete quando se usa mgh em vez de $E(h)$ para determinar a energia potencial gravítica de $\mathcal{C}$. (1)

7. Considere a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por (1.5)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \leq x < \dfrac{2^n-1}{2^n} \quad \text{para } n = 1,3,5,7,9,\ldots, \\ 0 & \text{se } \dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \leq x < \dfrac{2^n-1}{2^n} \quad \text{para } n = 2,4,6,8,10,\ldots, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$



Esboço de parte do gráfico de f.

Recorrendo às somas superiores e inferiores de Darboux, prove se f é ou não integrável. Em caso afirmativo calcule, justificando, o seu integral.