

EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II - 2ª Época

(Cursos de Civil e Território)

2º Semestre 98/99 - 14/7/99

1. (2,5 valores) Determine uma primitiva das seguintes funções:

a) $\cot 2x$, b) $x(1-x^2)^{3/2} \arcsin x$

2. (2 valores) Calcule o integral definido

$$\int_1^3 \frac{3x+8}{(x+2)^2(x+4)} dx.$$

3. (2 valores) Sejam f e g funções reais em \mathbf{R} definidas por

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{4}{\pi^2} x^2.$$

Esboce os gráficos das funções f e g . Calcule a área finita contida entre os gráficos de f e g . Seja L o comprimento da parte do gráfico de f que limita esta área. Mostre $\pi/2 \leq L \leq \sqrt{2}\pi/2$.

4. (2 valores) Indique o domínio maior $D \subset \mathbf{R}$ da função $F : D \rightarrow \mathbf{R}$ dada por

$$F(x) = \int_{1-x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt$$

Justifique que F é diferenciável em D e calcule a sua derivada.

5. (1,5 valores) Calcule o integral impróprio

$$\int_{\pi/4}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2} \right) dx.$$

6. (1,5 valores) Considere o subconjunto de \mathbf{R}^2

$$X = \{(x, y) | (y \geq 0) \wedge (x^2 + y^2 \leq 1)\} \cup \{(x, y) | (y = 0) \wedge (-2 \leq x \leq 2)\}.$$

Esboce o conjunto X . Indique os pontos interiores e os pontos fronteiros de X . Justificando brevemente, diga se X é a) compacto, b) conexo.

7. Seja $f : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ a função definida por

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

a) (2 valores) Mostre que f é prolongável por continuidade à origem. (Designe por $\tilde{f} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ a prolongação de f .)

b) (2 valores) Calcule as derivadas parciais de \tilde{f} em \mathbf{R}^3 . Qual é o domínio de diferenciabilidade de \tilde{f} ?

c) (1 valor) Seja $k : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ dada por $k(x, y) = f(x, y, 3)$. Indique uma equação do plano tangente ao gráfico de k para $x = 1, y = 2$.

d) (1,5 valores) Seja $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ dada por $g(t) = (x(t), y(t), z(t))$, com

$$x(t) = t + \cos t, \quad y(t) = 2 + \sin t, \quad z(t) = 3 + \int_0^t e^{-s^2} ds.$$

Calcule $(f \circ g)'(0)$.

8. (2 valores) Sejam f e g duas funções de \mathbf{R}^2 em \mathbf{R} de classe C^2 numa vizinhança de (a, b) . Suponha:

$$\begin{aligned} f(a, b) &= f_x(a, b) = 2, \\ g(a, b) &= g_x(a, b) = f_{xx}(a, b) = f_{xy}(a, b) = g_{xy}(a, b) = 1, \\ f_y(a, b) &= g_y(a, b) = 0, \\ g_{xx}(a, b) &= f_{yy}(a, b) = g_{yy}(a, b) = -1. \end{aligned}$$

Mostre que a função f/g tem um mínimo relativo no ponto (a, b) .