Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

1º EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: Civil, Território, Matemática e Física

1º Semestre 1999/2000

21 de Janeiro de 2000, 13.00 Duração: 3 horas

I

(6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $x\sin(x^2)\cos(x^2)\,,\ x \in \mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{1}{x\sqrt{1+2x}}\,,\ x \in]0,+\infty[$.

(c) $x\arctan(1+x)\,,\ x \in \mathbb{R}$.

2. Determine a área do conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ cujas coordenadas verificam as condições

$$y \geq |x|\ ,\quad y \leq \frac{1}{|x|} \quad \text{e} \quad y \leq 2\,.$$

II

(6 val.)

1. Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2} & ,\ \text{se}\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & ,\ \text{se}\ \ (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Para qualquer vector $\vec{v} = (a,b) \neq (0,0)$, calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$.

(c) A função f é diferenciável no ponto $(0,0)$?

2. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(x,y) = (1+2x^2-y, 1-x+2y^2)$ e $h \equiv h(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que

$$h(1,1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial h}{\partial u}(1,1) = \frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = -1\,.$$

Calcule o polinómio de Taylor de primeiro grau de $h \circ g$ na origem.

III
(5 val.)

1. Seja g a função definida por:

$$g(x,y) = \int_x^{xy} \frac{\arctan(1+t)}{t}\, dt \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função g. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Determine o vector ∇g no ponto $(x,y) \in D$.

(c) Verifique que a função g tem um único ponto de estacionaridade no seu domínio D. Trata-se de um ponto de extremo ? Justifique.

2. Desenvolva a função $x\log(x)$ em série de potências de $(x-1)$. Qual o maior intervalo aberto em que a série representa a função?

IV
(3 val.)

Para cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ define-se a "parte positiva", f^+, e a "parte negativa", f^-, de f pelas fórmulas:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } \ f(x) \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ f(x) < 0 \end{cases} \ ; \ f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & , \text{ se } \ f(x) \leq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ f(x) > 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que, para qualquer intervalo $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, uma função f é integrável em I se e só se o forem as funções f^+ e f^-.

(b) Indique exemplos de funções $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

(i) $f_1^+ + f_1^-$ seja integrável em $[0,1]$ e f_1 não o seja;

(ii) f_2^- seja integrável em $[0,1]$ e f_2^+ não o seja.