Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

$1^{\underline{o}}$ EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: LESIM, LERCI e LEGI

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2002/2003

23 de Junho de 2003, 10.00 — Duração: 3 horas

I (6 val.)

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1+x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$; (b) $\cos^2(x)$, $x \in \mathbb{R}$; (c) $\dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)(1+e^x)}$, $x \in]0,+\infty[$.

2. Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = 2(|x|-1) \ \text{ e } \ y = 1 - x^4 \ .$$

II (5,5 val.)

Seja g a função definida por:

$$g(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2+y^2}}{x-y} \ .$$

(a) Determine e represente graficamente o domínio D da função g. D é aberto? fechado? limitado?

(b) Identifique na figura anterior (ou num duplicado da mesma) os seguintes conjuntos:

- $D_0 = \{(x,y) \in D : g(x,y) = 0\} \equiv$ curva de nível zero de g;
- $D_+ = \{(x,y) \in D : g(x,y) > 0\}$;
- $D_- = \{(x,y) \in D : g(x,y) < 0\}$.

(c) Calcule e represente de forma apropriada na figura da alínea anterior o vector ∇g no ponto $(1,-1)$.

(d) Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$h(u,v) = (e^{u+v}\cos(u), u - \cos(v)) \ .$$

Calcule o vector $\nabla(g \circ h)$ no ponto $(0,0)$.

III (4,5 val.)

Seja f a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x+y|\sin(x+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \text{ se } \ (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 0 & , \text{ se } \ (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ com $v = (1,1)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de f no ponto $(0,0)$?

IV (4 val.)

1. Desenvolva a função $\dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $(x-2)$. Qual o "maior" intervalo aberto em que a série representa a função?

2. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,y) = \int_{x-y}^{x+y} h(t)\, dt \ .$$

Mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y), \ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

3. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x,y) = 3 - 3x^2 - y^2 + 2x^2y - 2x^4 \ .$$

Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de extremo local ou pontos de sela.